

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics  
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baldinger E. Baumann R. Mercier P. Scherrer E. Stiefel  
F. Stüssi W. Traupel H. Ziegler  
Redactor: R. Sängler

## INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

HUGHES, W. F., and OSTERLE, J. F., On the Adiabatic Couette Flow of a Compressible Fluid . . . . .	89
NICOLAS, M. M.: Comment agit le câble tracteur d'un téléphérique . . . . .	96
NICOLAS, M. M.: Géométrie de la chaînette ou hypergéométrie . . . . .	122
SHARMA, B. D.: Stresses Due to a Nucleus of Thermo-Elastic Strain (i) in an Infinite Elastic Solid With Spherical Cavity and (ii) in a Solid Elastic Sphere . . . . .	142

## Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

DEVogELAERE, R.: On a Paper of Gaunt Concerned With the Start of Numerical Solutions of Differential Equations . . . . .	151
SANYAL, L.: Jet Issuing in All Directions From a Thin Slit Round a Circular Cylinder of Small Radius Containing Liquid Under Pressure . . . . .	156
SCHMID, P.: Statistische Erwägungen bei Versuchen zur Beeinflussung der Niederschläge . . . . .	159
SHERIF, I. I.: The Transfer of Momentum Across Surfaces Drawn Perpendicular to the Direction of Flow in Gases Under Laminar Conditions . . . . .	165
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques . . . . .	167

Z A M P

Vol. VIII

Fasc. 2

Pag. 89-168

25. 3. 57

Birkhäuser Verlag Basel, Schweiz

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sängner, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurze Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Autoren von Originalarbeiten mit mehr als 16 Seiten Umfang haben von der 17. Seite an einen *Beitrag an die Satzkosten* von sFr. 20.- pro Seite und von der 25. Seite an einen solchen von sFr. 35.- pro Seite zu entrichten. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical should be addressed to the Editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors dispense with proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* should be added a brief summary in a language other than the original one. Drawings and photographs for *illustrations* should be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; lettering on the illustrations should be entered in pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. Authors of *Original Papers* exceeding 16 pages are requested to pay a *contribution of fr. 20.-* per page for pages 17-24, and of fr. 35.- per page for pages 25 and over. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free separata prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langues française, anglaise, allemande ou italienne; cependant, chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages, une *contribution de fr.s. 20.-* par page doit être payée pour les pages 17-24; à partir de page 25 la contribution est de fr.s. 35.- par page. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland sFr. 46.-, Ausland sFr. 58.-, Einzelnummer sFr. 12.-

Annual subscription (6 issues): Switzerland fr. 46.-, foreign fr. 58.-, single copy fr. 12.-

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse fr.s. 46.-, étranger fr.s. 58.-, le numéro fr.s. 12.-

Postabonnement - Post-Office Subscription - Abonnement par office postal

Belgien, Luxemburg	Dänemark	Deutschland	Finnland	Holland
Italien	Marokko	Norwegen	Portugal	Schweden

Inserate/Advertisements/Annonces:  $\frac{1}{4}$  Seite/page: Fr. 165.-,  $\frac{1}{2}$  Seite/page: Fr. 88.-,  $\frac{3}{4}$  Seite/page: Fr. 50.-

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. - All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. - Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

Copyright 1957 by Birkhäuser Verlag, Basel 10, Switzerland

Printed in Switzerland



# On the Adiabatic Couette Flow of a Compressible Fluid

By WILLIAM F. HUGHES<sup>1</sup>) and J. FLETCHER OSTERLE<sup>1</sup>), Pittsburgh, Pa., USA

## Nomenclature

$P$  pressure (absolute);  
 $T$  temperature ° R;  
 $x$  distance along slider;  
 $L$  length of slider;  
 $\mu$  viscosity;  
 $c_v$  specific heat at constant volume;  
 $M$  mass rate of flow;  
 $h$  distance between parallel plates;  
 $u$  fluid velocity in the  $x$ -direction;  
 $U$  velocity of the slider pad in the  $x$ -direction;  
 $z$  coordinate distance normal to the surface of the slider;  
 $\rho$  density;  
 $\gamma$  temperature coefficient of viscosity;  
 $\alpha$  distance coefficient of viscosity;  
 $R$  gas constant;  
 $c_p$  specific heat at constant pressure;  
 $k$  specific heat ratio.

Subscripts:

$()_0$  inlet conditions at  $x = 0$ ;  
 $()_e$  outlet conditions at  $x = L$ .

## Introduction

With the increasing use of air as a lubricant and interest in pneumatic control, a fundamental study of air flow in a narrow passage seems desirable. The problem investigated here is the adiabatic flow of air through the passage between two parallel plates very close together and in relative tangential motion, so-called Couette flow. The case where a pressure differential exists across the moving plate is also considered.

In Couette flow, heat generated by the viscous shearing stresses in the fluid is partially stored in the fluid increasing its internal energy, and partly conducted away through the plates which bound the flow. The isothermal and adiabatic solutions describe then the two limiting flow conditions. Whether the flow is isothermal, adiabatic, or somewhere in between depends on the individual situation, but it is thought that in many practical situations the flow is

<sup>1</sup>) Department of Mechanical Engineering, Carnegie Institute of Technology.

adiabatic [1]<sup>2</sup>). For isothermal Couette flow, a pressure gradient cannot occur in the film; it being possible only when the plates are tilted. However, for adiabatic flow, a pressure gradient is incurred for parallel operation of the plates because of the so-called 'thermal wedge' effect, which is a result of compressibility, and may become important for very high relative velocities [2].

The first treatment of the Couette flow of air was included in the work of HARRISON in 1913 [3] who considered the more general problem of isothermal air flow between tilted plates. Work was extended to a consideration of momentum effects in air flow for stationary plates along with experimental data by S. GRINNEL in 1955 [4]. The following mathematical analysis allows the prediction of the pressure and temperature distributions and mass rate of flow for adiabatic Couette flow, and certain conclusions are drawn as to the importance of the thermal wedge effect.

### Mathematical Analysis

For the viscous laminar flow of a fluid through a narrow channel the usual assumptions common to lubrication type flow can be made [1]. In addition, for air, the compressibility terms are neglected in the momentum equation; this assumption is valid as long as the velocities are much less than sonic [5]. The momentum equation then takes the simplified form:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (1)$$

The energy equation for air may be written [6]:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial x} + P \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2. \quad (2)$$

Since the viscosity of air varies nearly linearly with temperature through a range of several hundred degrees, the following relationship is assumed [7]:

$$\mu = \mu_0 [1 + \gamma (T - T_0)]. \quad (3)$$

The equation of state

$$P = \rho R T \quad (4)$$

must be used, and the continuity equation written in the form

$$M = \int_0^h \rho u dz = \text{const} \quad (5)$$

will be employed.

Equations (1) through (5) must be solved simultaneously to completely describe the flow.

<sup>2</sup>) Numbers in brackets refer to References, page 95.



By integrating equation (1) subject to the boundary conditions:

$$z = 0: \quad u = 0; \quad z = h: \quad u = U,$$

which arise from the 'no-slip' assumption of hydrodynamics, we obtain

$$u = \frac{1}{2\mu} \times \frac{dP}{dx} (z^2 - hz) + \frac{Uz}{h} \quad (6)$$

for the velocity profile. Substituting this expression and the equation of state into the continuity equation there results

$$\frac{h^3}{12\mu} \times \frac{dP}{dx} - \frac{Uh}{2} + \frac{MRT}{P} = 0. \quad (7)$$

Now, substituting equation (6) into the energy equation and integrating we obtain:

$$M c_v \frac{dT}{dx} = \frac{h^3}{12\mu} \left( \frac{dP}{dx} \right)^2 + \frac{\mu U^2}{h} + \frac{P h^3}{12} \times \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\mu} \times \frac{dP}{dx} \right). \quad (8)$$

The three equations (5), (7), and (8) constitute a set of equations to be solved for the temperature, pressure, and viscosity variations.

Eliminating  $T$  between equations (7) and (8), making use of the relationships:

$$c_p - c_v = R, \quad \frac{c_p}{c_v} = k.$$

there results

$$\frac{k h^3}{12(k-1)} \times \frac{d}{dx} \left( \frac{P}{\mu} \times \frac{dP}{dx} \right) + \frac{\mu U^2}{h} = \frac{U h}{2(k-1)} \times \frac{dP}{dx}. \quad (9)$$

If the viscosity variation with  $x$  were known equation (9) could be integrated directly for the pressure distribution. If a linear variation of viscosity with  $x$  is assumed, it will be found that the final temperature distribution is nearly

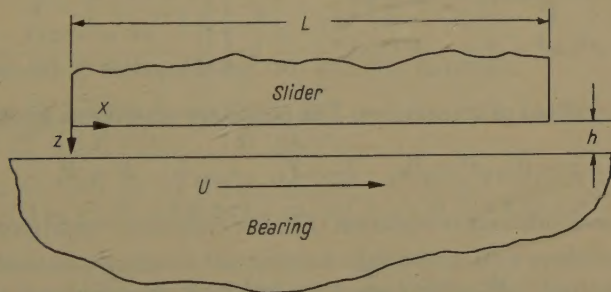


Figure 1

The parallel-surface slider pad and bearing in Couette flow.

linear in  $x$  and, hence, the assumption is a reasonable one for a first approximation. We assume

$$\mu = \mu_0 (1 + \alpha x), \quad (10)$$

where  $\alpha$  is determined by the maximum temperature at  $x = L$ .

Equation (9) can now be integrated directly to yield

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\mu_0 (1 + \alpha x)}{\theta} + \frac{\mu_0 (1 + \alpha x)}{P} \left\{ B - \varphi x \left( 1 - \frac{\alpha x}{2} \right) \right\}, \quad (11)$$

where

$$\varphi = \frac{12 \mu_0 U^2 (k - 1)}{k h^4}$$

and

$$\theta = \frac{k h^2}{6 U},$$

and  $B$  is a constant of integration to be determined by the boundary conditions. In order to integrate (11), let

$$P = w(x) \theta f(x), \quad (12)$$

where

$$f(x) = B - \varphi \left( x + \frac{\alpha x^2}{2} \right). \quad (13)$$

Then we obtain for  $w(x)$

$$\frac{dw}{dx} \left[ \frac{w \theta^2}{\theta^2 \varphi w^2 + w + 1} \right] = \frac{\mu_0 (1 + \alpha x)}{f(x)}. \quad (14)$$

The integral of equation (14) has three forms depending on whether  $k(k-1)$  is greater than, less than, or equal to unity. For air,  $k(k-1)$  is equal to 0.56, and if we let

$$a^2 = 1 - \frac{4}{3} k(k-1)$$

equation (14) integrates to the form

$$\ln \frac{1}{4c^2} [(1 - a^2) w^2 + 4w + 4] [f(x)]^2 = \frac{1}{a} \ln \left[ \frac{(1 - a^2) w + 2(1 - a)}{(1 - a^2) w + 2(1 + a)} \right], \quad (15)$$

where  $C$  is a constant of integration. The boundary conditions are the following

$$x = 0: \quad P = P_0, \quad T = T_0; \quad x = L: \quad P = P_e.$$

Applying these conditions to equation (12), the boundary conditions on  $w(x)$  are

$$x = 0: \quad w = \frac{P}{B \theta}; \quad x = L: \quad w = \frac{P_e}{\theta f(L)}.$$

These conditions may be applied to equation (15) to obtain two equations

involving the constants  $B$ ,  $C$ , and  $\alpha$ .

$$\ln \left[ \frac{(1-a^2)}{4} \left( \frac{P_0}{C\theta} \right)^2 + \frac{P_0 B}{C^2 \theta} + \frac{B^2}{C^2} \right] = \frac{1}{a} \ln \left[ \frac{(1-a^2) P_0 + 2 B \theta (1-a)}{(1-a^2) P_0 + 2 B \theta (1+a)} \right] \quad (16)$$

and

$$\ln \left\{ \frac{(1-a^2) P_e^2}{4 \theta^2 C^2} + \frac{P_e f(L)}{\theta C^2} + \left[ \frac{f(L)}{C} \right]^2 \right\} = \frac{1}{a} \ln \left[ \frac{(1-a^2) P_e + 2 \theta f(L) (1-a)}{(1-a^2) P_e + 2 \theta f(L) (1+a)} \right]. \quad (17)$$

We can obtain another equation relating  $B$  and  $\alpha$  by combining equation (7) with equation (11) to eliminate  $dP/dx$ . Hence

$$T = \frac{P}{2MR} \left\{ U h - \frac{h^3}{6 P \theta} [P + \theta f(x)] \right\}. \quad (18)$$

From the  $x$  and  $T$  viscosity variations it follows that

$$T = \frac{\alpha x}{\gamma} + T_0. \quad (19)$$

Now, by combining equations (18) and (19) and using the boundary conditions on pressure and temperature it follows that the mass rate of flow is given by

$$M = \rho_0 \left[ \frac{U h}{2} - \frac{h^3}{12} \left( \frac{1}{\theta} + \frac{B}{P_0} \right) \right] \quad (20)$$

and

$$\alpha = \frac{\frac{24 P_e}{h^3 L \varphi} \left\{ \frac{P_0}{P_e} \left[ \frac{U h}{2} - \frac{h^3}{12} \left( \frac{1}{\theta} + \frac{B}{P_0} \right) \right] - \frac{U h}{2} + \frac{h^3}{12} \left( \frac{1}{\theta} + \frac{B - \theta L}{P_e} \right) \right\}}{\left\{ 1 - \frac{24 R \rho_0}{\gamma \varphi h^3 L} \left[ \frac{U h}{2} - \frac{h^3}{12} \left( \frac{1}{\theta} + \frac{B}{P_0} \right) \right] \right\}} \quad (21)$$

For the special case of  $P_0 = P_e$ , that is the non-pressurized slider pad, equation (21) takes the simpler form:

$$\alpha = \frac{2}{L} \left\{ \frac{24 R P_0}{\gamma h^3 L \theta} \left[ \frac{U h}{2} - \frac{h^3}{12} \left( \frac{1}{\theta} + \frac{B}{P_0} \right) \right] - 1 \right\}^{-1}. \quad (22)$$

We can eliminate  $C$  by combining (16) and (17) to obtain

$$\ln \left\{ \frac{[(1-a^2) P_0^2 + 4 B \theta P_0 + 4 B^2 \theta^2] B^2}{\{(1-a^2) P_e^2 + 4 P_e \theta f(L) + 4 \theta^2 [f(L)]^2\}} \right\} = \frac{1}{a} \ln \left[ \frac{[(1-a^2) P_0 + 2 B \theta (1-a)] [(1-a^2) P_e + 2 \theta f(L) (1+a)]}{[(1-a^2) P_0 + 2 B \theta (1+a)] [(1-a^2) P_e + 2 \theta f(L) (1-a)]} \right]. \quad (23)$$

The use of these equations for the solution of practical flow problems is straightforward, but involves some trial and error work since the equations are nearly all transcendental. Equations (24) and (21), or (22), can be solved simultaneously for  $B$  and  $\alpha$ ; however, since the unknowns do not appear in explicit form,



a trial and error numerical solution must be effected. The constant  $C$  may then be determined explicitly from equation (16) or (17). Once  $\alpha$ ,  $B$  and  $C$  are known, equation (15) gives the pressure distribution and equation (18) gives the temperature distribution in terms of the pressure and mass rate of flow which may be determined from equation (20).

It is interesting to note that for the hydrostatic situation of zero relative velocity of the slider pad there is no increase in temperature of the air as it flows through the passage. This may be shown by examining equation (9) in the limiting case of  $U = 0$ :

$$\frac{k h^3}{k(k-1)} \times \frac{d}{dx} \left( \frac{P}{\mu} \times \frac{dP}{dx} \right) = 0. \quad (24)$$

Therefore

$$\frac{P}{\mu} \times \frac{dP}{dx} = \text{const.} \quad (25)$$

And from equation (7)

$$\frac{dT}{dx} = 0.$$

From these equations it is seen that the flow must be isothermal, consequently isoviscous, and by integrating equation (7) under these conditions the pressure distribution is found to be

$$\frac{P_0^2 - P^2}{P_0^2 - P_e^2} = \frac{x}{L}, \quad (26)$$

which is that obtained by GRINNELL [4] for the isothermal case.

### Numerical Example and Discussion

The analysis herein presented allows the prediction of pressure and temperature distributions and the mass rate of flow for adiabatic Couette flow. To illustrate the use of these equations sample calculations were made for the following slider pad:

$$\begin{aligned} L &= 2 \text{ in.}, \\ h &= 0.001 \text{ in.}, \\ U &= 1000 \text{ in./s;} \\ T_0 &= 560^\circ \text{ R}, \\ P_0 &= 14.7 \text{ psia}, \\ P_e &= 14.7 \text{ psia}, \\ \gamma &= 1.33 \times 10^{-3} / ^\circ \text{ R} \end{aligned}$$

and the results for temperature and pressure distributions are shown in Figure 2. The temperature which undergoes appreciable rise,  $146^\circ \text{ R}$ , is nearly linear in  $x$ , and the pressure undergoes a slight build up with a maximum rise of about 1.9 psi due to the thermal wedge effect. Hence, if a pressure differential is



maintained across the moving plate, or slider pad, the contribution to the pressure by the thermal wedge effect may be quite small compared to hydrostatic pressures. This is the case in hydrostatic lubrication where hydrodynamical effects may be negligible for low speed operation.

For very high speed operation the thermal wedge effect becomes important and may be used to provide a load supporting pressure build up in a journal

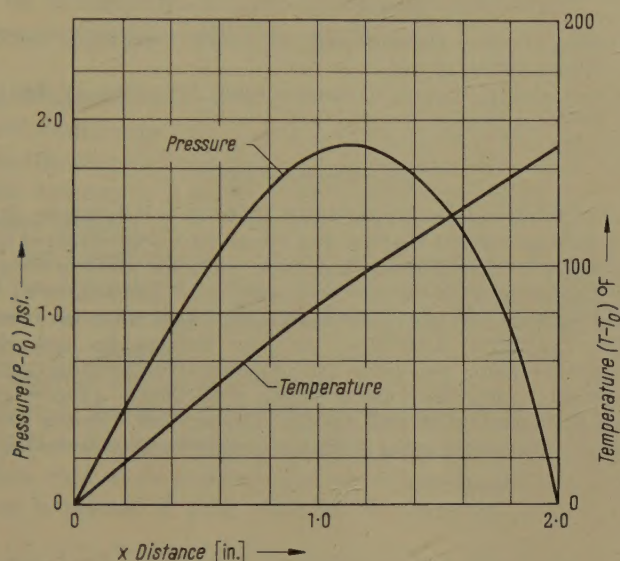


Figure 2  
Pressure and temperature distributions.

or slider pad bearing in addition to geometrical wedge effects which are present for isothermal operation of tilted pad slider bearings.

In actuality the operating characteristics for a slider pad bearing falls somewhere between the isothermal and adiabatic limits, depending on the conductivity of the bearing material and degree of insulation. For most practical situations, the flow will be nearly isothermal because of the relatively high conductivity of the bearing material. Recent work by the authors seem to indicate in a quantitative manner that the flow may be essentially isothermal in many cases, but the adiabatic solution does form an upper bound which might be of considerable interest in certain problems.

#### REFERENCES

- [1] W. F. COPE, *The Hydrodynamical Theory of Film Lubrication*, Proc. roy. Soc. Lond. 197, 201 (1949).

- [2] F. OSTERLE, A. CHARNES, and E. SAIBEL, *On the Solution of the Reynolds Equation for Slider-Bearing Lubrication. VI. The Parallel-Surface Slider-Bearing Without End Leakage*, Trans. Amer. Soc. mech. Engrs. 75, 1133 (1953).
- [3] M. A. HARRISON, *The Hydrodynamical Theory of Lubrication with Special Reference to Air as a Lubricant*, Trans. Camb. phil. Soc. 22, 39 (1913).
- [4] S. K. GRINNEL, *Flow of a Compressible Fluid in a Thin Passage*, A. S. M. E. preprint No. 55-SA-13.
- [5] H. F. PURDAY, *An Introduction to the Mechanics of Viscous Flow* (Dover 1949), p. 173.
- [6] S. GOLDSTEIN, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, vol. II (Oxford University Press 1938), p. 606.
- [7] J. H. KEENAN and J. KAYE, *Thermodynamic Properties of Air* (John Wiley and Sons, 1945), p. 36.

### Zusammenfassung

Eine Untersuchung wurde durchgeführt über die adiabatische Strömung der Luft zwischen zwei parallelen Platten, bei einem Druckunterschied quer über die sich bewegende Platte. Die Lösung lässt eine thermale Keilwirkung der hydrodynamischen Schmierung erwarten und gibt eine quantitative Analyse des allgemeineren Problems, wo ein Druckunterschied quer über die Gleitplatte vorhanden ist. Die Ergebnisse deuten an, dass der Beitrag des hydrodynamischen Druckes oft äusserst klein sein kann (für mässige Geschwindigkeiten) im Vergleich zum hydrodynamischen Druck in den dem Druck ausgesetzten Lagern. Im Falle von stillstehenden Platten ist die adiabatische Lösung gleich der isothermen Lösung; weswegen keine Temperaturerhöhung stattfindet.

(Received: September 24, 1956.)

## Comment agit le câble tracteur d'un téléphérique

Par MARIE MARCEL NICOLAS, Paris<sup>1)</sup>

### 1. Description générale schématique d'un téléphérique

Un téléphérique se compose essentiellement d'un câble tendu entre deux points *A* et *B* sur lequel roule un chariot auquel est suspendue une cabine. Le déplacement du chariot sur le câble porteur, véritable rail aérien, est obtenu par l'action d'un câble tracteur.

Le présent mémoire a pour but l'étude de l'action d'un câble tracteur provoquant le déplacement d'un chariot de téléphérique sur un câble porteur. De ce dernier nous ne rappellerons qu'une caractéristique mécanique fondamentale; à l'une de ses extrémités le câble porteur est soumis à une traction constante. De ce fait toutes les catènes que peut former ce câble entre les appuis

<sup>1)</sup> Secrétariat d'État aux Travaux Publics, aux Transports et au Tourisme.



$A$  et  $B$ , et éventuellement entre ceux intermédiaires, sont toutes découpées sur des chaînettes de modules pouvant être différents mais dont toutes les bases canoniques sont à la même altitude, ce que nous exprimons en écrivant que toutes les catènes de suspension sont isosthènes (en un point quelconque de l'une d'entre elles la traction est mesurée par le poids de câble ayant une longueur égale à l'altitude du point au-dessus de la base canonique commune).

Comme on le verra par la suite, cette particularité mécanique du câble porteur a une importance considérable dans l'étude du câble tracteur qui lui est associé.

Les téléphériques à va-et-vient sont ceux dont le chariot parcourt un câble porteur tantôt dans un sens de  $A$  vers  $B$ , tantôt dans le sens opposé. Il est donc normal de mettre en parallèle deux câbles porteurs et de faire en sorte qu'avec un seul câble tracteur on assure simultanément les déplacements des deux cabines en sens opposés.

Il existe des téléphériques à va-et-vient dans lesquels la deuxième voie parallèle n'a pas été installée; même dans ces installations l'aménagement et le fonctionnement du câble tracteur demeurent analogues à ceux à deux chariots, que nous décrivons ci-après.

Le câble tracteur se compose d'un brin fixé à la face côté  $B$  du chariot; ce brin va contourner une molette (ou une poulie) dans la station  $B$  pour revenir à la face côté  $B$  de l'autre chariot à laquelle il est fixé; de même un autre brin issu de la face côté  $A$  du premier chariot va contourner une poulie (ou une molette) dans la station  $A$  pour atteindre la même face du second chariot où il est fixé.

Ces deux brins constituent donc un câble continu formant une boucle entre les extrémités  $A$  et  $B$ , avec les deux maillons intercalés que sont les chariots.

Il n'est pas exclu que le brin issu par exemple de la face  $B$  du chariot ne rejoigne pas celle de l'autre chariot immédiatement après avoir contourné la molette (ou la poulie)  $B$ ; il existe en effet des installations où un tel brin ne rejoint la face  $B$  de l'autre chariot qu'après avoir contourné une poulie (ou molette) en  $A$ , puis une deuxième molette (ou poulie) en  $B$  (différente de la première); ce dispositif, dû à M. l'ingénieur REBUFFEL, permet d'utiliser les parties  $BA$  et  $AB$  de ce circuit comme câble d'agrippement respectif du second et du premier chariot.

On conçoit qu'avec un tel aménagement une molette motrice installée dans l'une quelconque des deux stations  $A$  ou  $B$ , et autour de laquelle le brin du câble tracteur sera convenablement enroulé, suffira pour assurer les déplacements du chariot. Pour limiter les efforts de traction auxquels sera soumis le câble tracteur on organise dans l'une des stations un dispositif de mise en tension au moyen d'un contrepoids.

Ce dispositif de mise en tension peut être organisé indifféremment dans la station où se trouve la molette motrice, ou dans celle opposée dont la molette

n'est qu'une poulie de renvoi, folle autour de son axe. Dans ce dernier cas la mise en tension s'effectue en exerçant une traction constante, par le moyen d'un contrepoids, sur l'axe qui peut se déplacer entre deux glissières. L'effort de traction constant exercé sur le brin du câble dans ce système est donc égal à  $P/2$ .

Dans l'autre cas, en appelant  $A$  la station où sont réunis la mise en mouvement et la mise en tension, le brin tracteur, issu de la face  $A$  du chariot, en pénétrant dans cette station,  $A$ , contourne d'abord une poulie montée folle autour d'un axe horizontal (supportant un contrepoids  $P$ ), puis contourne la molette motrice, où il reçoit une impulsion, et revient contourner une deuxième poulie montée folle, jumelle de la précédente mais non solidaire de celle-ci, autour de l'axe support du contrepoids; après ce circuit, tracteur-tenseur, dans la station mixte  $A$ , le brin tracteur va rejoindre la face  $A$  de l'autre chariot. Dans ce système les efforts de traction subis par le brin tracteur aux points où il entre dans la station  $A$  et où il en sort, ne sont pas égaux, l'un étant égal à

$$\frac{M}{2} + \frac{P}{4},$$

l'autre à

$$-\frac{M}{2} + \frac{P}{4},$$

en appelant  $M$  l'effort transmis au brin tracteur par la molette motrice, lequel effort peut s'exercer indifféremment dans le sens du défilement du brin tracteur ou dans le sens opposé.

Si donc on connaît l'effort maximum  $M$  que la molette motrice pourra transmettre au brin qui la contourne, on en déduit la valeur qu'il faut donner au poids du contrepoids pour que la traction dans le câble tracteur dans la station mixte demeure inférieure à une limite donnée.

On remarquera que cette installation mixte comporte une imperfection mécanique. En effet, les deux poulies folles jumelles exercent sur l'axe horizontal support du contrepoids  $P$  deux actions verticales qui ne sont pas égales l'une étant

$$M + \frac{P}{2},$$

l'autre étant

$$-M + \frac{P}{2}.$$

Il en résulte une action de basculement de cet axe, mesurée par le moment  $Me$  où  $e$  est l'écart entre les deux plans verticaux axiaux des poulies jumelles. Au cours d'un cycle de parcours, il est certain que les tractions exercées dans les brins tracteurs s'échangeront, donc la sollicitation au basculement changera de sens, ce qui nécessiterait un aménagement spécial, pratiquement irréalisable, des glissières guides de cet axe d'une horizontalité approximative variable. On



peut douter que cette imperfection mécanique des stations mixtes, tenseur-moteur, soit favorable à un défilement stable de leur câble tracteur.

En conclusion de cette description de l'aménagement général du câble tracteur d'un téléphérique on retiendra que celui-ci se compose de deux brins distincts mis bout à bout, avec interposition de deux maillons constitués par les chariots, pour constituer une boucle continue entre les stations *A* et *B*.

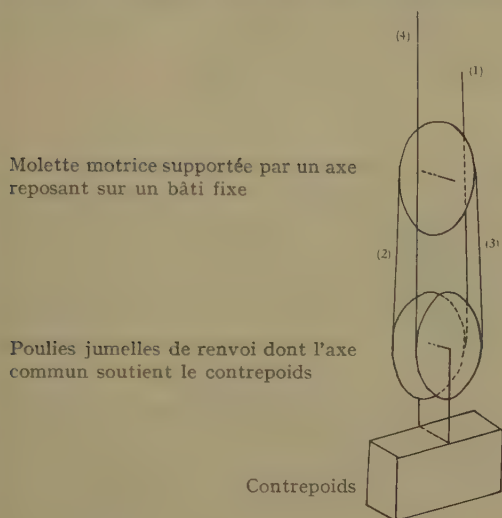


Figure 1

Schéma du dispositif moteur-tenseur.

Celui de ces deux brins dont les deux extrémités sont fixés à la face tournée vers la station *B*, de chacun des chariots sera dit : brin *B* ; et de même l'autre brin sera dit : brin *A*. Un seul de ces brins contourne la molette motrice, l'autre ne contournant qu'une poulie folle : le premier sera qualifié brin actif, et le second brin rétroactif.

Celui de ces deux brins, qui contournera la ou les poulies de mise en tension, cumulera donc son rôle de brin, actif ou rétroactif, avec celui de brin de mise en tension.

Il y a donc deux combinaisons possibles pour associer la mise en tension soit avec la mise en traction soit avec la mise en rétrotraction. Et de fait on trouve dans la pratique ces deux combinaisons, sans égard au sens de la différence d'altitude entre les deux stations.

On remarquera que pour décrire l'aménagement général d'un téléphérique, et plus particulièrement celui des câbles tracteurs, nous avons évité d'évoquer les différences d'altitude entre les deux stations, ce qui aurait été le cas en

qualifiant l'une de supérieure, l'autre d'inférieure. En effet cette différence d'altitude n'est nullement une caractéristique *sine qua non* d'une installation téléphérique, et nous soutenons qu'est encore une installation téléphérique celle destinée par exemple au franchissement d'un large ravin moyennant un câble porteur tendu entre deux points au même niveau.

De même dans la succession des appuis intermédiaires, il peut fort bien s'en trouver trois successifs, dont celui du milieu soit le plus élevé.

Dans les deux cas susvisés une distinction procédant du critérium d'une moindre sollicitation d'un des deux brins ne peut s'appliquer.

## 2. Définition du problème mécanique du câble tracteur

Ces préliminaires étant posés, nous pouvons aborder l'étude du comportement du câble tracteur, plus exactement de ses deux brins quant à leur intervention dans le déplacement en va-et-vient, des deux chariots. Si ces interventions n'étaient pas comparables, on pourrait déjà conclure qu'en raison de la symétrie inversée des phases successives, au cours d'un cycle de parcours, chaque brin assurerait tour à tour un rôle tracteur prépondérant.

Il n'en est rien. Comme nous l'avons écrit dans une étude antérieure (*Câble de téléphérique supportant une charge*, Ann. Ponts Chaussées 1955, mai-juin) il est injustifié de minimiser en apparence l'utilité d'un brin du câble tracteur en lui attribuant la désignation de câble-lest à l'opposé de celle de câble tracteur réservée à l'autre.

Depuis que nous avons dénoncée l'impropriété de cette dénomination «câble-lest» nous en avons vainement cherché une définition précise. Par exemple dans le cas d'un téléphérique célèbre, récemment mis en service, où la station à l'altitude inférieure est une station mixte moteur-tenseur, il est évidemment impossible de soutenir que l'un des brins du câble tracteur ait un rôle prépondérant de tracteur, tandis que l'autre, qui deviendrait dénommé à tort câble-lest, ne serait qu'un simple ballot servant seulement à régler la traction du brin affublé du titre de câble tracteur.

L'étude de l'effort qu'il est nécessaire d'exercer sur un chariot roulant sur un câble porteur pour provoquer son déplacement montre :

1° l'impossibilité d'avoir la maîtrise de ce déplacement au moyen d'un câble tracteur n'agissant que par un seul brin ;

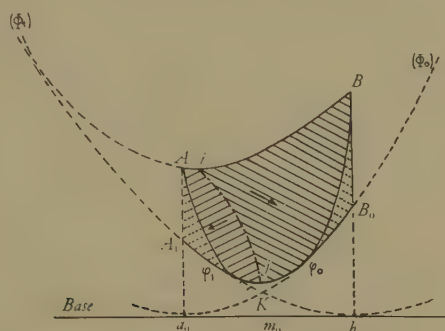
2° la rigoureuse équivalence des rôles tracteurs de chacun des deux brins, en tout point du parcours du chariot.

Par «avoir la maîtrise du déplacement d'un chariot roulant sur un câble porteur» nous entendons avoir la possibilité de choisir, à l'intérieur de certaines limites, la trajectoire de ce chariot et celle de lui imprimer sur cette trajectoire telle vitesse et telle accélération, toujours dans certaines limites, dont en parti-



culier une vitesse nulle, c'est à dire maintenir le véhicule suspendu à l'arrêt en un point quelconque de son parcours.

Les limites du choix de la trajectoire sont celles dont nous avons démontré l'existence (Ann. Ponts Chaussées 1955, mai-juin, 338). Tout se passe en effet comme si le chariot, réduit à un point matériel, était astreint à se mouvoir dans un champ de forces résultant de deux autres champs de forces, savoir: 1° les forces verticales de pesanteur agissant sur une masse égale à celle du chariot et



//// Zone à une force applicable par point.  
 ///// Zone à deux forces applicables par point.

Figure 2

de sa charge; 2° les forces que le câble porteur déformé en deux catènes  $\widehat{AC}$  et  $\widehat{BC}$  exerce sur ses deux sections qui encadrent le point C. Ce deuxième champ de forces indépendantes de la masse du point est déterminé par la longueur et l'inclinaison de la sustente  $\widehat{AB}$ , par le poids par unité de longueur du câble porteur et enfin par la traction constante (contrepois) exercée à l'une des extrémités.

Nous reproduisons le dessin qui résume cette partie de cette étude; on remarquera qu'y est indiquée la direction générale de la force que le chariot devra exercer sur le câble porteur pour contraindre celui-ci à se déformer en deux catènes dont les extrémités communes marquent l'emplacement du chariot.

Cette force bien définie en chaque point de l'espace accessible au chariot ne peut provenir que du poids de celui-ci et de la transmission, par le chariot, de l'effort qu'il subit de la part du câble tracteur. Donc en définitive l'effort que devra exercer le câble tracteur sur le chariot pour maintenir celui-ci à l'arrêt en un point quelconque de la zone d'accessibilité est rigoureusement déterminé. Pour un même point d'arrêt, mais pour des poids variables du chariot l'effort du câble tracteur gardera une composante horizontale invariable (égale à la

différence des modules des deux catènes tracées par le câble porteur déformé); seule variera la composante verticale de cet effort.

Si de plus on se donne la trajectoire et la vitesse (variable ou non) le long de celle-ci, l'effort demandé au câble tracteur sera encore entièrement déterminé compte tenu de la vitesse, du rayon de courbure de la trajectoire et de l'accélération tangentielle.

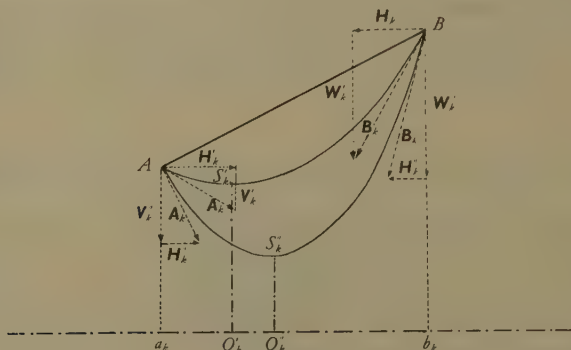


Figure 3

Couple de catènes de suspension appareillées pour une sustente  $\overline{AB}$ .

$$\vec{A}_k = p \times \overline{A a_k}; \quad \vec{B}_k = p \times \overline{B b_k}; \quad \vec{O}_k \vec{S}_k' = r_k' = \frac{H_k'}{p}; \quad \vec{O}_k'' \vec{S}_k'' = r_k'' = \frac{H_k''}{p}.$$

En définitive le problème mécanique que nous avons à résoudre est le suivant: étant donné un point  $C$  de l'espace, comment peut-on avec un câble tracteur issu de deux points fixes  $A$  et  $B$  le faire passer par un troisième point  $C$ , pour qu'il y exerce une force dont les deux composantes, horizontale  $H$  et verticale  $V$ , aient des valeurs imposées.

La solution de ce problème nous sera donnée par l'étude des tractions diverses qu'un câble, astreint à passer en deux points fixes, exerce sur ces points selon les diverses catènes de suspension qu'il peut former.

### 3. Etude des tractions exercées par un câble fixé en deux points $A$ et $B$ entre lesquels il est suspendu

On sait que toutes les catènes de suspension possibles entre deux points  $A$  et  $B$  peuvent être associées deux à deux, l'une tendue de module  $r_k'$ , l'autre lâche de module  $r_k''$  ( $r_k'' < r_k'$ ), et ayant toutes deux même base canonique. Cela signifie en particulier que les ordonnées canoniques  $\overline{A a_k}$  et  $\overline{B b_k}$  des extrémités ont mêmes valeurs dans les deux systèmes de coordonnées canoniques afférentes aux deux chaînettes. Les abscisses canoniques de ces extrémités



étant respectivement  $O'' a_k$  et  $O'' b_k$  en suspension lâche et  $O' a_k - O' b_k$  en suspension tendue.

On sait aussi qu'il existe une suspension dans laquelle les ordonnées canoniques  $A a$  et  $B b$  sont minimales et que cette suspension de module  $r$  sépare la zone des catènes tendues de celles des catènes lâches.

Comme  $A a_k$ ,  $B b_k$ , etc., mesurent à un coefficient constant près (le poids  $p$  du câble par unité de longueur) les tractions  $\vec{A}_k$  et  $\vec{B}_k$  exercées par le câble sur les extrémités, on justifie ainsi la dénomination de suspension minimale pour celle de module  $r$ . Rappelons que la suspension minimale d'une sustente  $AB$  faisant un angle  $i$  avec l'horizontale est définie par la condition que les tangentes à la chaînette en  $A$  et  $B$  se coupent sur la base. Analytiquement cette condition se traduit par les deux relations suivantes entre les abscisses canoniques  $x_0$ ,  $x_1$  des extrémités, dans la chaînette de module  $r$ :

$$\frac{x_0}{r} - \frac{1}{\operatorname{th} \frac{x_0}{r}} = \frac{x_1}{r} - \frac{1}{\operatorname{th} \frac{x_1}{r}} \quad \text{et} \quad \frac{\operatorname{ch} \frac{x_1}{r} - \operatorname{ch} \frac{x_0}{r}}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg} i$$

(voir à ce sujet notre mémoire *Equilibre d'un câble de téléphérique*, Ann. Ponts Chaussées 1954, janvier-février).

Les tractions  $\vec{A}_k$  comme les tractions  $\vec{B}_k$  sont égales mais avec des inclinaisons différentes, celles afférentes à la suspension lâche étant plus voisines de la direction verticale.

Convenons d'affecter la lettre  $B$  à l'extrémité supérieure, de désigner par  $V'_k$  la composante verticale de la traction  $\vec{A}_k$  en suspension tendue et par  $V''_k$  la même composante en suspension lâche; de même nous désignerons par  $W'_k$  et  $W''_k$  les composantes verticales de la traction  $\vec{B}_k$  en suspension respectivement tendue et lâche. Les composantes horizontales  $H'_k$  des tractions  $\vec{A}_k$  et  $\vec{B}_k$  en suspension tendue étant égales à  $r'_k$ , mais dirigées en sens contraires (toujours vers l'aplomb de la sustente); il en est de même des composantes horizontales  $H''_k$  (égales à  $r''_k$ ) des tractions  $\vec{A}_k$  et  $\vec{B}_k$  en suspension lâche.

Une étude détaillée, que l'on trouvera en appendice au présent mémoire, apprend que des relations, d'une part entre  $V$  et  $H$ , d'autre part entre  $W$  et  $H$  il existe des représentations graphiques dont les caractéristiques essentielles suffisent pour répondre le problème mécanique du câble tracteur tel que nous l'avons posé.

En effet si d'un point quelconque  $\alpha$  (pour lequel il est opportun de choisir l'extrémité inférieure  $A$ ) on trace tous les vecteurs  $\vec{A}_k$  figurant les tractions exercées par les diverses suspensions sur l'extrémité inférieure  $A$ , leurs extrémités ponctuent une courbe dont la concavité continue est orientée vers la



Si à partir d'un autre point  $\beta$ , pour lequel il est opportun de choisir le point  $b_0$  à l'aplomb de l'extrémité  $B$  sur l'horizontale de l'extrémité inférieure  $A$ , nous déterminons de même la courbe tracée par les extrémités  $B_k$  des diverses tractions, nous obtenons une courbe  $(B)$  à concavité continue orientée vers la zone

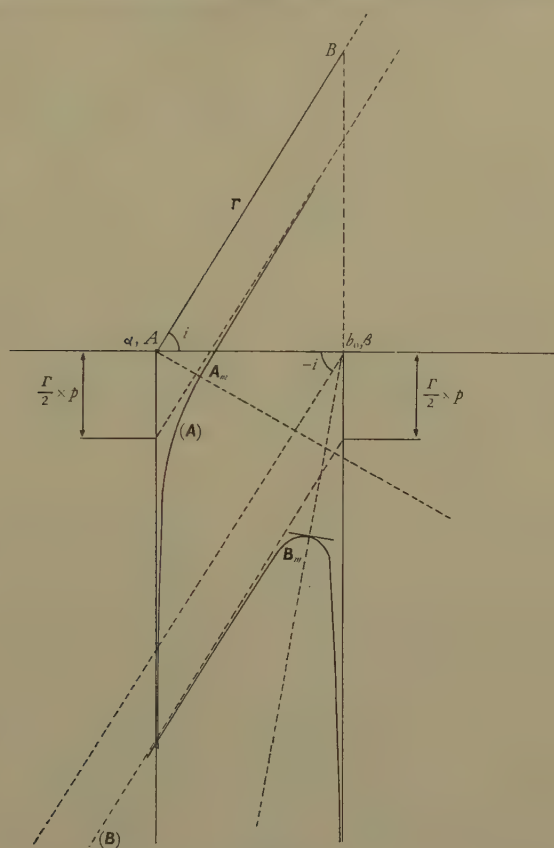


Figure 4b  
( $i = 57^{\circ} 39'$ ).

inférieure sous l'aplomb de  $A$  et comprise entre deux asymptotes ayant mêmes dispositions que celles indiquées pour la courbe  $(A)$ . Nous appellerons le point  $\beta$  origine des vecteurs  $\vec{B}_k$  le foyer de la courbe  $(B)$ .

La traction  $\vec{B}_m$  de la suspension minimale marque le point  $B_m$  où cette courbe est normale au vecteur  $\vec{B}_m$  générateur de ce point.

La détermination du point  $A_s$  (avec une composante horizontale  $H_s = \vec{A}_s$ ) aura permis de situer sur la courbe  $(B)$  le point dont le vecteur  $\vec{B}_s$  a même



composante horizontale (même module)  $H_s$ , mais orientée en sens inverse. On démontre qu'entre ce point  $B_m$  et ce point  $B_s$  la courbe (B) a une tangente horizontale: ceci signifie que c'est pour une suspension comprise entre la suspension minimale et la suspension à tangente inférieure horizontale que la composante verticale  $W$  a une valeur minimale (donc en suspension tendue et à tangente inférieure plongeante).

Il est évident que si la sustente  $AB$  change de longueur, mais en gardant la même inclinaison  $i$ , les deux courbes susdécrites (A) et (B) se modifient homothétiquement, dans le rapport des longueurs des sustentés à partir des origines de leurs vecteurs générateurs.

Plus intéressante pour le problème étudié est la déformation progressive des deux courbes (A) et (B) quand l'angle  $i$  varie, la projection horizontale de la sustente  $AB$  demeurant inchangée.

On démontre alors que quand  $i$  augmente la nouvelle courbe (A) est au-dessus de la précédente, et qu'en particulier le vecteur  $\vec{A}_m$  qui marque la suspension minimale (ou le point où la courbe (A) est normale au vecteur  $\vec{A}_m$ ) diminue de longueur en même temps que diminue l'angle qu'il fait avec l'horizontale, ces deux quantités tendant simultanément vers zéro, la forme de courbe (A) tendant vers celle d'une droite verticale. La longueur maximale de ce vecteur minimal  $\vec{A}_m$  étant celle afférente à une inclinaison  $i$  nulle, l'angle du vecteur  $\vec{A}_m$  avec l'horizontale étant alors égal à  $56^\circ 28'$  et  $\vec{A}_m$  étant égale au facteur  $p$ , près à 0,726 fois la longueur de cette sustente horizontale. Mais pour  $i$  nul, la courbe (B) est devenue identique, mais inversée, par rapport à la verticale, à la courbe (A). En effet pour des valeurs croissantes de  $i$ , les courbes (B) successives se placent les unes en dessous des autres entre deux branches asymptotiques dont l'une est toujours verticale tandis que l'autre s'incline en tendant à se rapprocher de la verticale. Et on démontre que le point haut de chacune de ces courbes ne cesse de s'abaisser en tendant vers le point inférieur à l'infini sur la verticale. (Pour  $i = 0$  ce point haut se trouve sur l'horizontale d'ordonnée  $A b_0/2$  et à l'infini sur cette horizontale.)

Les deux figures 4a et 4b représentent pour deux inclinaisons différentes, mais pour une même longueur de la projection horizontale  $A \bar{b}_0$  de la sustente, les courbes (A) et (B).

Pour étudier l'effort de traction qu'un brin tracteur issu de  $A$  peut exercer sur un point  $C$ , nous tracerons la courbe ( $C_A$ ) afférente à l'extrémité  $C$  de la sustente fictive  $\overline{AC}$ ; de même pour étudier l'effort de traction qu'un brin tracteur issu de  $B$  peut exercer sur ce même point  $C$ , nous tracerons la courbe ( $C_B$ ) afférente à l'extrémité  $C$  de la sustente fictive  $\overline{CB}$ .

Quel que soit le brin tracteur considéré on voit immédiatement que s'il agissait seul il ne pourrait exercer en  $C$  que très exceptionnellement une force

imposée à priori. En effet seraient déjà à éliminer toutes les forces imposées dont la composante horizontale serait orientée vers l'extérieur de l'aplomb de la sustente fictive du brin tracteur. A la composante horizontale, convenablement orientée, et ayant une valeur imposée, il ne correspondrait dans le brin tracteur qu'une seule composante verticale  $V$ .

Il est évident que de telles conditions ne sont pas celles d'une maîtrise, si limitée soit-elle, du mouvement d'un téléphérique.

Supposons que par hasard cette composante horizontale de la traction du brin tracteur soit égale et opposée à celle de la force créée en  $C$  par le câble porteur déformé, supposons encore que la composante verticale de cette dernière force associée au poids du chariot soit égale et opposée à la composante verticale  $V$  de la traction, on pourrait alors tenir l'arrêt en ce point  $C$  avec le brin tracteur. Mais il suffirait de modifier le poids (la charge suspendue) du chariot pour être assuré que le point  $C$  ne pourra plus être un point d'arrêt.

Au contraire si on dispose de deux brins tracteurs, issus de points  $A$  et  $B$ , dont les verticales encadrent un point  $C$  accessible au chariot, on peut toujours réaliser théoriquement en ce point n'importe quelle force, le choix de celle-ci n'étant restreint que par une limite à la résistance des câbles. C'est ce que nous allons démontrer.

#### 4. Réalisation d'une force quelconque au moyen de deux brins tracteurs

Nous continuons à désigner par les mêmes lettres,  $A$  et  $B$ , les appuis du câble porteur et les extrémités des brins tracteurs; en fait ces deux catégories d'organes mécaniques de l'installation ne coïncident pas et ne peuvent coïncider. Mais cette distinction n'est nécessaire que pour étudier le problème plus particulier de l'abord ou du départ d'un appui par le chariot, aussi ne la ferons-nous pas dans l'exposé qui va suivre.

Tout point  $C$  accessible sous une sustente  $\overline{AB}$  ( $A$  plus bas que  $B$ ) faisant avec l'horizontale un angle  $i$ , marque le sommet d'un contour polygonal  $ACB$ , dont le côté  $AC$  fait avec l'horizontale un angle  $i_1$  toujours inférieur à  $i$ , si le point  $C$  est à une altitude intermédiaire entre celle de  $A$  et de  $B$ , tandis que le côté  $CB$  fait avec l'horizontale un angle  $i_2$  toujours supérieur à  $i$  donc à  $i_1$ . En d'autres termes cette disposition des sustentés fictives signifie que  $C$  est extrémité supérieure pour la sustente fictive issue de l'appui inférieur et est extrémité inférieure pour la sustente fictive issue de l'appui supérieur.

Mais il peut advenir, et ce sera presque toujours le cas si la différence d'altitude entre  $B$  et  $A$  n'est pas très accentuée, que l'on ait à étudier des parcours dont des points soient à une altitude inférieure à celle de l'appui le plus bas; dans ce cas la sustente fictive  $\overline{AC}$  a une inclinaison  $i_1$  négative. Une telle disposition des sustentés fictives, caractérisée par un angle  $i_1$  négatif et un angle

$i_2$  positif, ou par le fait que  $C$  est extrémité inférieure pour les deux sustentés fictives, se rencontrera toujours si  $A$  et  $B$  sont à la même altitude.

Nous allons examiner dans ces deux cas comment le concours des deux brins tracteurs permet de réaliser en  $C$  n'importe quelle force donnée à priori.

1° *Cas d'un point  $C$  à une altitude intermédiaire entre les deux appuis  $A$  et  $B$*

Nous mesurerons positivement les composantes horizontales des forces quand celles-ci sont orientées dans le sens aplomb de  $A$  (appui le moins haut) vers aplomb de  $B$  (appui le plus haut).

Nous appellerons  $H_A$  et  $W_A$  les composantes, horizontale et verticale, de la traction  $\vec{C}_A$  exercée en  $C$  par le brin tracteur issu de  $A$ ; nous appellerons  $H_B$  et  $V_B$  les mêmes composantes de la traction  $\vec{C}_B$  due au brin issu de  $B$ . Les composantes  $W$  et  $V$  sont mesurées positivement quand elles sont orientées vers le bas.

A partir d'un foyer  $\gamma$ , que pour la commodité de l'interprétation des courbes il y a intérêt à choisir sur la verticale du point  $C$  étudié, nous traçons la courbe ( $C_A$ ) dont les coordonnées seront  $H_A$  et  $W_A$  et la courbe ( $C_B$ ) dont les coordonnées seront  $H_B$  et  $V_B$ .

Ces deux courbes sont en quelque sorte dos à dos de part et d'autre de l'axe vertical des ordonnées  $V$  (ou  $W$ ), lequel axe est aussi leur asymptote commune (dans ce cas les catènes tractrices ont un module nul, c'est à dire sont des catènes infiniment lâches). Les autres asymptotes sont pour la courbe ( $C_A$ ) la droite faisant l'angle  $i_1$  avec l'horizontale et passant par le point de coordonnées: 0 et  $I/2$ ; pour la courbe ( $C_B$ ) ce sera la droite faisant l'angle  $i_2$  et passant par le point de coordonnées: 0 et  $I_2/2$ .

Dans la suite de notre exposé nous devons considérer des courbes ( $C_A$ ) et ( $C_B$ ) dont les asymptotes verticales ne sont plus confondues, aussi dans ce cas nous désignerons par  $\gamma_A$  le foyer de la première et par  $\gamma_B$  celui de la seconde.

Soient alors  $H$  et  $V$  les deux composantes de la force à réaliser en conjuguant les deux tractions  $\vec{C}_A$  et  $\vec{C}_B$  on devra avoir:  $\vec{H}_A + \vec{H}_B = \vec{H}$ .

De même on devra avoir:  $\vec{W}_A + \vec{V}_B = \vec{V}$ .

On réalisera une représentation graphique de ces deux relations:

a) en déplaçant de  $H$  (en grandeur et signe) la courbe ( $C_A$ ) puis en inversant celle-ci autour de sa nouvelle verticale asymptote, ce qui nous donnera la courbe ( $-C_A$ ) inversée (le foyer  $\gamma_A$  sera déplacé de  $H$  par rapport au foyer  $\gamma_B$ );

b) en traçant ensuite la courbe symétrique de ( $C_B$ ) par rapport à l'horizontale.

Toute verticale coupant les deux courbes ( $-C_A$ ) et ( $-C_B$ ) (la première inversée par rapport à son nouvel axe vertical, la seconde retournée par rapport à l'axe horizontal demeuré en place) y marque deux points  $A$  et  $B$ , et deux seulement, qui déterminent deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  dont les composantes hori-



zontales satisfont à l'égalité  $\vec{H}_A + \vec{H}_B = \vec{H}$  tandis que le vecteur vertical  $\vec{BA}$  mesurera en grandeur et signe la somme  $\vec{W}_A + \vec{V}_B = \vec{BA}$ .

Pour qu'une verticale puisse avoir deux points d'intersection A et B avec les courbes  $(-C_A)$  et  $(-C_B)$ , il suffit qu'elle soit tracée à n'importe quelle distance de  $\gamma_B$  supérieure à H si H est positive, et à n'importe quelle distance positive de

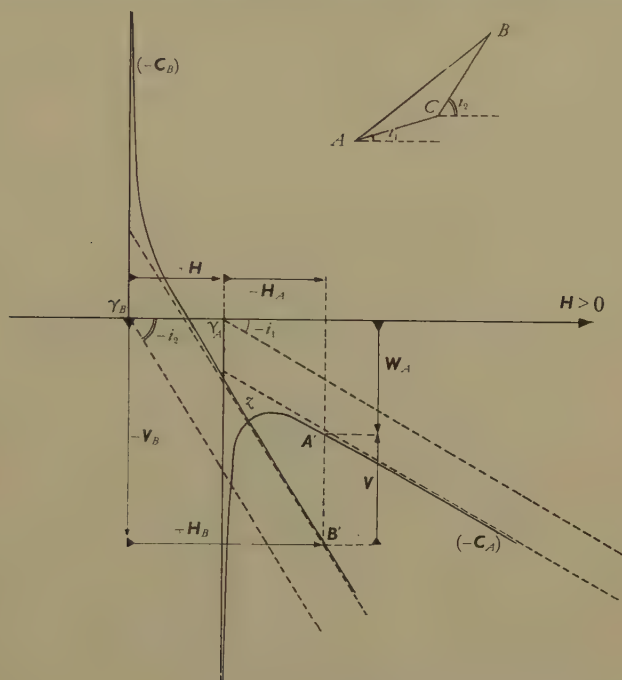


Figure 5a

$\gamma_B$  si H est négative. Et les formes de ces deux courbes sont telles qu'une verticale qui les coupe toutes deux ne peut couper chacune qu'en un seul point. Dans ce cas à chacun des points d'intersection correspond un vecteur de traction  $\vec{C}_A$  pour l'un et un vecteur de traction  $\vec{C}_B$  pour l'autre dont les composantes horizontales  $H_A$  et  $H_B$  satisfont bien à la relation  $\vec{H}_A + \vec{H}_B = \vec{H}$  et dont les composantes verticales  $W_A + V_B$  ont pour résultante géométrique le vecteur  $\vec{BA}$  en grandeur et signe.

Or si on appelle Z le point commun aux deux courbes  $(-C_A)$  et  $(-C_B)$ , on constate que ce point ne peut pas ne pas exister. Cette existence étant une conséquence de l'inégalité des angles  $i_1$  et  $i_2$  des directions asymptotiques (avec  $i_2 > i_1$ ). Les verticales bisécantes tracées à gauche de Z donnent des résultantes  $\vec{BA}$  positives (dirigées vers le bas) dont les valeurs diminuent

progressivement de l'infini à zéro quand la verticale bisécante se rapproche de  $Z$ . Quand la verticale bisécante se déplace au-delà de  $Z$ , la résultante  $\vec{BA}$  des deux composantes verticales des tractions  $\vec{C}_A$  et  $\vec{C}_B$  devient négative (dirigée vers la haut) et croît indéfiniment, à partir de la valeur zéro, cette croissance indéfinie étant la conséquence de l'inégalité des inclinaisons  $i_1$  et  $i_2$  (avec  $i_1 < i_2$ ) des deux asymptotes.

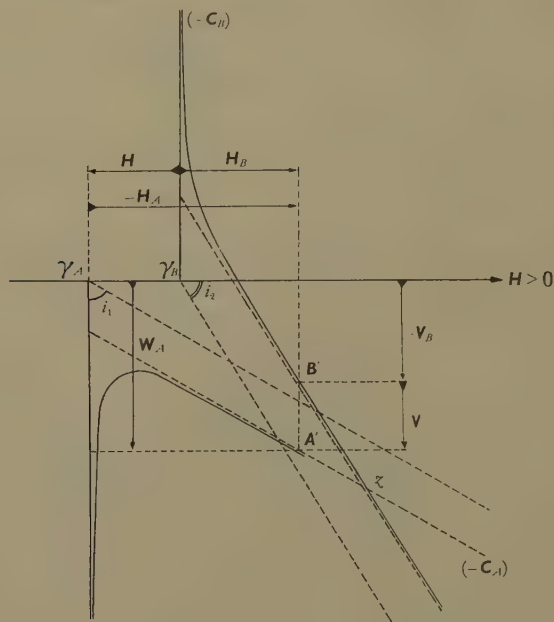


Figure 5b

Ainsi se trouve démontrée la possibilité de réaliser avec deux brins tracteurs et au point  $C$  de leur jonction, n'importe quelle force pourvu que ce point  $C$  soit compris entre les verticales des appuis  $A$  et  $B$  du câble tracteur et à une hauteur intermédiaire entre ces deux appuis.

## 2° Cas d'un point $C$ à une altitude inférieure à celle de l'appui le plus bas

Dans ce cas le point  $C$  marque l'extrémité inférieure des deux sustentés fictives  $\vec{AC}$  et  $\vec{CB}$ . Donc les deux tractions  $\vec{C}_A$  et  $\vec{C}_B$  dont la résultante sera l'effort exercé par le câble tracteur sur le point  $C$ , ont des courbes représentatives qui traversent l'axe des abscisses avec des asymptotes inclinées ( $i_1$  et  $i_2$ ) de part et d'autre de cet axe. En recommençant le même raisonnement que dans le cas précédent on arrive à la même conclusion.

La figure 5a montre la représentation de la détermination graphique de deux suspensions réalisant n'importe quelle force ayant une composante horizontale  $H$  positive, pour un point  $C$  à une altitude intermédiaire entre celles de  $A$  et de  $B$ ; la figure 5b montre la même représentation pour une composante horizontale  $H$  négative.

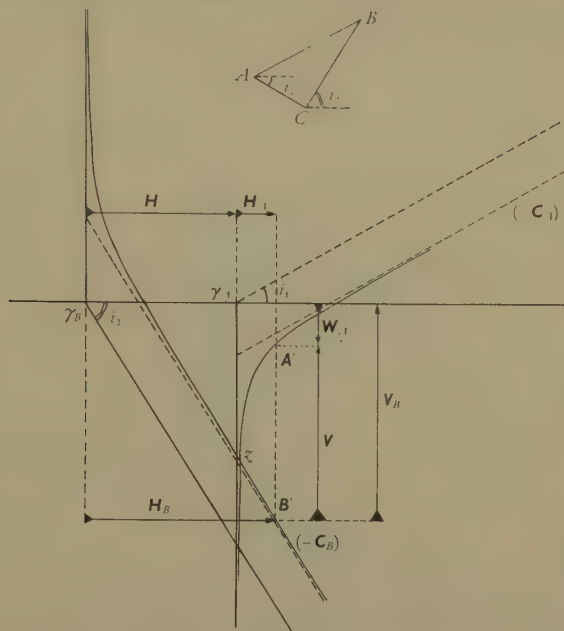


Figure 6a

Les figures 6a et 6b montrent les mêmes représentations pour un point  $C$  à une altitude plus basse que celle de l'altitude inférieure  $A$ .

Dans les quatre cas types aussi figurés, les composantes verticales  $V$  positives (c'est à dire dirigées vers le bas) correspondent toujours aux suspensions définies par les verticales à gauche du point  $Z$ , et les composantes verticales négatives (dirigées vers le haut) correspondent aux suspensions définies par des verticales à droite du point  $Z$ .

Le fait que ces quatre représentations types aient été établies pour des sustentives fictives  $AC$  et  $CB$  ayant des projections horizontales égales (verticale du point  $C$  au milieu de l'intervalle  $AB$ ) n'infirme nullement la conclusion du cas général puisque la représentation de l'une ses deux courbes ( $-C_A$ ) ou ( $-C_B$ ) y deviendrait modifiée homothétiquement à partir de son foyer  $\gamma_A$  ou  $\gamma_B$ .

Ainsi seule l'intervention de deux brins tracteurs permet de réaliser en tout point  $C$  accessible au chariot du téléphérique telle force que l'on voudra sans



restriction aucune, hormis celle qu'imposera la limite de résistance du câble tracteur. Et il ressort péremptoirement de cette étude que dans leur action conjuguée de traction aucun des deux brins n'assume un rôle prépondérant sur celui de l'autre: ils sont rigoureusement indispensables l'un à l'autre, et la défaillance de l'un entraîne automatiquement l'inutilité de l'autre et l'impotence du téléphérique.

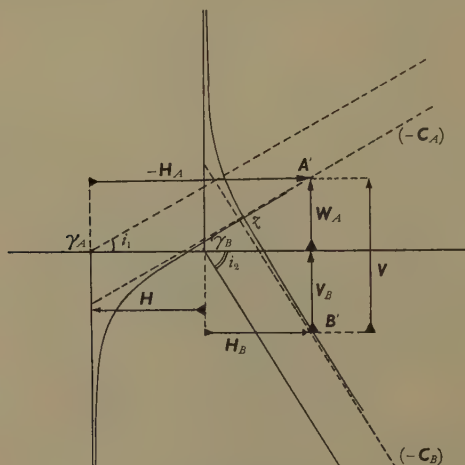


Figure 6b

## 5. Restriction dans le choix de la force à réaliser en $C$ du fait de la limite de résistance à la rupture des brins du câble tracteur

L'étude de cette restriction se fait très simplement en utilisant la courbe inversée  $(-C_A)$  par rapport à la verticale et la courbe retournée  $(-C_B)$  par rapport à l'axe des abscisses, mais en traçant ces courbes de telle sorte que leur asymptote verticale soit commune. On obtiendra ainsi une représentation du genre de celle de la figure 7.

A partir du foyer  $\gamma$  commun de ces deux courbes, nous tracerons une circonférence de rayon  $L_A$ , dont le rayon mesure en longueur la résistance à la rupture (ou une fraction de sécurité de celle-ci) du brin issu de l'appui  $A$ . Cette circonférence coupera la courbe inversée  $(-C_A)$  en deux points  $A'$  et  $A''$  sis de part et d'autre du point  $A_m$  s'il y a eu intersection: un allongement suffisant de la sustente fictive  $\overrightarrow{AC}$ , dont l'inclinaison  $i_1$  demeurerait inchangée, pourrait rendre  $\overrightarrow{A_m}$  égal ou supérieur à  $L_A$ .

On opérera de même avec un autre rayon  $L_B$  pour tracer du foyer commun  $\gamma$  une autre circonférence qui coupera la courbe retournée  $(-C_B)$  en deux points  $B'$  et  $B''$  sis également du part et d'autre du point  $B_m$ . Le rayon  $L_B$  sera rarement

égal à  $L_A$  pour deux raisons: les deux brins ne présentent pas nécessairement la même résistance à la rupture et même s'il en était ainsi il faudrait retrancher à celle du brin  $B$  le poids d'une longueur de câble égale à la dénivellation entre l'appui  $B$  et le point  $C$  étudié.

Si l'on trace ensuite les 4 verticales passant par les 4 points susdéfinis:  $A'$ ,  $A''$ ,  $B'$ ,  $B''$ , on voit que le choix de la force à réaliser sera limité par un

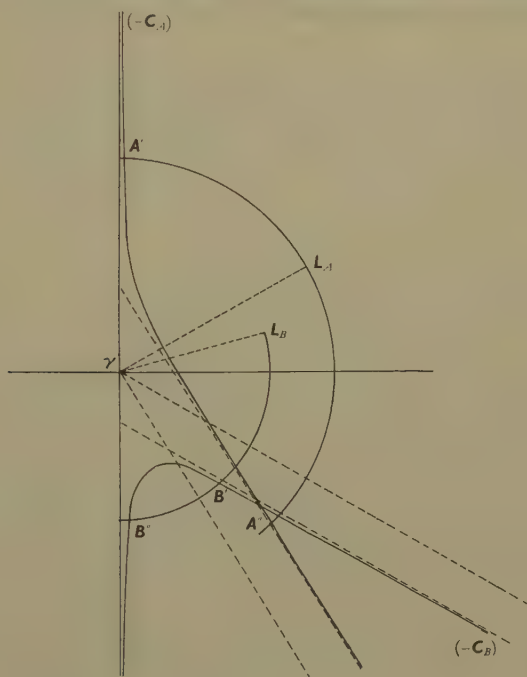


Figure 7

éloignement l'une de l'autre des deux asymptotes (des deux foyers  $\gamma_A$  et  $\gamma_B$ ) qui fera coïncider la verticale de  $B''$  avec celle de  $A'$  et par un autre éloignement amenant en coïncidence la verticale de  $B'$  avec celle de  $A''$ . Dans le second cas la composante horizontale  $H$  de la force limite aura une valeur maximale  $H'_B + H''_A$  ( $H'_B$  valeur positive maximale  $H''_A$  valeur négative, minimale en valeur absolue) tandis que sa valeur minimale  $H''_B + H'_A$  sera atteinte dans l'autre cas extrême d'éloignement. Dans l'un comme dans l'autre cas les deux brins tracteurs seraient sollicités à leurs limites respectives de résistance.

Si de plus on considère tous les cas admissibles d'éloignement entre les deux positions extrêmes résultant des limites respectives de la résistance à la rupture des deux brins tracteurs, si on considère encore que des modifications de longueur des sustentés fictives à inclinaisons inchangées, interviennent également,

on en déduira qu'il est impossible d'affirmer *a priori* qu'un brin tracteur sera systématiquement moins sollicité que l'autre.

Si on pourvoit un des brins tracteurs d'un dispositif lui imposant une traction fixe en un point donné (qui sera pratiquement le point fixe d'où il est issu) il n'en résulte nullement une garantie de limitation pour la traction dans l'autre brin; seul sera restreint le choix de la force pouvant être réalisée par la conjonction en  $C$  des deux brins.

En effet supposons que cette traction fixe soit imposée au brin issu de  $B$  et que celle-ci soit figurée sur la courbe représentative des tractions  $\vec{C}_B$  par deux points  $B'$  et  $B''$  (sur une circonférence de centre  $\gamma_B$ ) et de coordonnées respectives  $H'_B$ ,  $V'_B$  et  $H''_B$ ,  $V''_B$ . Dans le choix de la force réalisable, la composante  $H$  de celle-ci devra déjà être choisie telle qu'après avoir déplacé l'asymptote verticale de la courbe ( $-C_A$ ) de la quantité  $H$  l'une au moins des deux verticales tracées par les points  $B'$  et  $B''$  se trouve à droite de l'asymptote verticale déplacée  $\gamma_A$ . On en déduit que  $H$  ne peut avoir qu'une valeur égale ou inférieure à celle de  $H'_B$  (puisque  $H'_B > H''_B$ ).

Pour les valeurs de  $H$  comprises entre  $H'_B$  et  $H''_B$  on ne dispose que d'une seule verticale bisécante, celle qui passe par  $B'$ , donc d'une seule valeur de  $V$  par valeur de  $H$ ; ce ne sera que pour les valeurs de  $H$  inférieures à  $H''_B$  que l'on disposera de deux verticales bisécantes, celles passant par  $B'$  et  $B''$ , donc de deux valeurs de  $V$  par valeur de  $H$ .

Il suffit, à l'aide de la figure, d'imaginer par la pensée l'infinité de combinaisons possibles (inclinaisons des sustentés de leurs longueurs relatives) pour conclure qu'un dispositif imposant une traction fixe à l'un des brins ne donne aucune garantie quant à la limite de l'effort qui pourra être imposé à l'autre brin.

Si cet autre brin est aussi pourvu d'un dispositif analogue lui imposant une traction fixe, il devient évident que en chaque point  $C$  le choix de la force réalisable par la conjonction des deux brins tracteurs deviendra limité à 4 vecteurs forces, ceux résultant de la mise en alignement vertical des deux points limites  $A'$  et  $A''$  avec les deux autres points limites  $B'$  et  $B''$ .

On a coutume de qualifier de dispositif de réglage de tension celui d'un contrepoids transmettant une traction constante au brin qui contourne une poulie. Cette dénomination est inexacte; il ne s'agit pas d'un réglage mais bel et bien d'un dispositif imposant une tension, en un mot d'un dispositif de mise en tension pour employer la dénomination dont nous nous sommes servis au début de cette étude quand nous avons donnée la description générale schématique d'un téléphérique.

Le véritable dispositif de réglage de tension est celui réalisé par la molette motrice, qui reçoit du moteur des impulsions tractrices vraiment réglables. Aussi du point de vue de la sécurité des câbles tracteurs la meilleure organisation d'un téléphérique est celle qui fait du brin rétroactif le brin de mise en tension (grâce à l'action d'un contrepoids) et du brin actif le brin de réglage de la tension (grâce à l'action modulée du moteur).



En limitant à cet exposé le développement de quelques déductions parmi les très nombreuses que permet la confrontation des courbes représentatives (A) et (B) des tractions dans un câble à ses extrémités nous pensons avoir présenté la solution de ce problème annexe que nous avons invoquée dans un mémoire antérieur pour proclamer l'impropriété de la dénomination câble-lest. Certes notre affirmation a été contestée, curieusement sans aucune démonstration, car pour certain la critique de la conclusion d'un problème est plus aisée que l'art d'en trouver la solution.

Nous ferons remarquer enfin que pour de telles études l'analyse ne peut fournir des éclaircissements comparables à ceux qu'offre le raisonnement, non pas que les mises en équation soient difficiles, mais seulement parce que celles-ci aboutissent à des relations entre fonctions et arguments hyperboliques dont l'interprétation devient vite inextricable.

### Annexe

*Détermination de la forme et des caractéristiques structurales des courbes (A) et (B), représentatives des tractions  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  exercés par un câble de longueur variable fixé en deux points A et B*

On sait que toute catène formée par un câble sous une sustentante  $\overline{AB}$  est obtenue par une transformation homothétique d'un certain arc de chaînette  $\overline{A_k B_k}$  qu'une corde  $A_k B_k$ , ayant même inclinaison  $\hat{i}$  que la sustentante, découpe dans une chaînette de référence, le rapport d'homothétie étant  $\overline{AB}/\overline{A_k B_k}$ .

Prenons comme chaînette de référence celle dont la corde en position minimale d'inclinaison  $i$  a pour longueur celle de la sustentante  $AB$ . Le module  $r$  de cette chaînette, ainsi que les ordonnées canoniques correspondantes  $A \hat{a}$  et  $B \hat{b}$  de la sustentante  $AB$  sont déterminées par les caractéristiques de la position minimale en inclinaison  $\hat{i}$ .

Ainsi chaque catène de suspension sous la sustentante  $AB$  est engendrée par une certaine corde  $A_k B_k$  de cette chaînette de référence. Mais comme les cordes  $A_k B_k$  peuvent être appareillées deux à deux, l'une en dessous de la corde minimale  $AB$  (et nous l'appellerons  $A'_k B'_k$ ) l'autre en dessus (et nous l'appellerons  $A''_k B''_k$ ), de telle sorte que  $A'_k \hat{a}'_k / A'_k B'_k = A''_k \hat{a}''_k / A''_k B''_k$ , il existe toujours deux suspensions, l'une lâche l'autre tendue, produisant à chacune des extrémités de la sustentante des tractions  $\vec{A}_k$  égales mais de directions différentes, de même que les tractions  $\vec{B}_k$ .

Nous appellerons  $r'_k$  le module de la suspension tendue et  $r''_k$  celui de la suspension lâche.

Nous appellerons  $V'_k, H'_k$  les composantes, verticale et horizontale, de la traction  $\vec{A}_k$  en suspension tendue, et  $V''_k$  et  $W''_k$  ces mêmes composantes en suspension lâche.

Pour les composantes des tractions  $\vec{B}_k$  à l'extrémité supérieure  $B$ , nous emploierons les lettres  $W'_k$  et  $W''_k$  pour distinguer les composantes verticales en suspension tendue et lâche, les composantes horizontales demeurant respectivement égales à celles des tractions  $\vec{A}_k$ , au signe près puisqu'elles sont toujours orientées vers la zone à l'aplomb sous la sustentante.

Convenons de donner une valeur positive aux composantes verticales  $V$  et  $W$  quand elles sont orientées vers le bas (comme la pesanteur) et convenons de compter  $H$  positivement quand cette composante horizontale est dirigée de l'aplomb de l'appui le plus bas vers celui de l'aplomb le plus haut. (Au cas où les appuis seraient à la même altitude, l'étude est si simplifiée qu'une représentation graphique des courbes (A) et (B) devient superflue.)

Ces notations étant ainsi précisées, on en déduit les relations suivantes :

$$\begin{aligned} r'_k &= H'_k = r \frac{\overline{A B}}{\overline{A'_k B'_k}}, & r''_k &= r \frac{\overline{A B}}{\overline{A''_k B''_k}} = H''_k, \\ \overline{A'_k} &= \overline{A} \overline{a'_k} = \overline{A B} \frac{\overline{A'_k a'_k}}{\overline{A'_k B'_k}} = \overline{A B} \frac{\overline{A''_k a''_k}}{\overline{A''_k B''_k}} = \overline{A B} q_k, \\ \overrightarrow{B'_k} &= \overline{B} \overline{b'_k} = \overline{A B} \frac{\overline{B'_k b'_k}}{\overline{A'_k B'_k}} = \overline{A B} \frac{\overline{B''_k b''_k}}{\overline{A''_k B''_k}} = \overline{A B} (q_k + \sin i), \\ V'_k &= \frac{\widehat{A'_k S}}{\overline{A'_k B'_k}} \overline{A B}, & V''_k &= \frac{\widehat{A''_k S}}{\overline{A''_k B''_k}} \overline{A B}, \\ W'_k &= \frac{\widehat{B'_k S}}{\overline{A'_k B'_k}} \overline{A B}, & W''_k &= \frac{\widehat{B''_k S}}{\overline{A''_k B''_k}} \overline{A B}. \end{aligned}$$

Examinons comment évoluent les suspensions engendrées par des cordes génératrices qui s'élèveraient progressivement dans la chaînette de référence, à partir du point  $I$  de celle-ci où la tangente a l'inclinaison  $i$ .

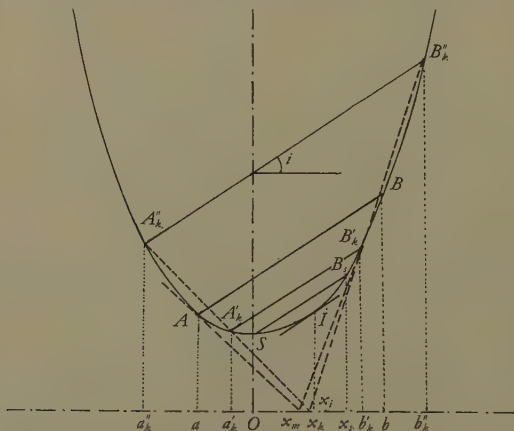


Figure 8

$x_m$  point de rencontre des tangentes aux extrémités de la corde  $AB$  en position minimale pour l'inclinaison  $i$  ( $Aa / AB$  a une valeur minimale ainsi que  $Bb / AB$ );  $x_k$  point de rencontre des alignements des extrémités de deux cordes parallèles en correspondance de traction pour l'inclinaison  $i$ .

$$\left( \frac{\overline{A''_k a''_k}}{\overline{A''_k B''_k}} = \frac{\overline{A'_k a'_k}}{\overline{A'_k B'_k}} \right) \text{ et } \left( \frac{\overline{B''_k b''_k}}{\overline{A''_k B''_k}} = \frac{\overline{B'_k b'_k}}{\overline{A'_k B'_k}} \right)$$

En suspension infiniment tendue (corde génératrice infiniment voisine du point  $\bar{I}$ ) les deux tractions ( $\bar{A}$ ) et ( $\bar{B}$ ) sont infiniment grandes, égales et apposées suivant la direction de la sustente.

Au fur et à mesure que la suspension devient moins tendue, les tractions  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  commencent par devenir de plus en plus petites,  $\bar{A}$  décroissant plus vite que  $\bar{B}$  (le rapport  $B/A$  augmente).

Cette décroissance simultanée de  $\bar{A}$  et de  $\bar{B}$  se poursuivra jusqu'à ce que la corde génératrice  $A_k B_k$  se confonde avec la corde minimale  $\bar{A} \bar{B}$ ; puis cette corde génératrice continuant à s'élever,  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  se mettront à croître,  $\bar{A}$  croissant plus vite que  $\bar{B}$  (le rapport  $B/A$  diminue et tend vers 1). Les composantes horizontales ( $H$  et  $-H$ ) qui étaient infinies ne cessent de décroître et cette décroissance se poursuivra jusqu'à la valeur nulle, qui correspond à une suspension infiniment lâche engendrée par une corde génératrice  $A_k B_k$ , tracée à l'infini au-dessus du point  $\bar{I}$ .

On notera que pendant cette évolution l'angle  $\beta$  que fait la direction de la traction  $\bar{B}$  avec l'horizontale n'a cessé de croître pour tendre vers  $\pi/2$ , la traction étant toujours orientée vers le bas.

Au contraire pour la traction  $\bar{A}$ , d'abord orientée vers le haut, on voit que sa direction s'abaisse progressivement jusqu'à devenir horizontale (la corde génératrice est alors celle qui passe par le sommet de la chaînette de référence), puis cet angle  $\alpha$  se remet à croître pour tendre vers  $\pi/2$ . Il suffit d'attribuer à cet angle  $\alpha$  une valeur négative pour les tractions  $\bar{A}$  orientées au-dessus de l'horizontale, pour pouvoir conclure que cet angle  $\alpha$ , ainsi mesuré algébriquement, ne cesse de croître pour tendre vers  $\pi/2$  comme l'angle  $\beta$ .

Il est évident que pour une catène quelconque de suspension la composante verticale  $W$  d'une traction  $\bar{B}$ , à l'extrémité la plus haute, est toujours supérieure, en valeur absolue, à la composante verticale  $V$  de la traction à l'autre extrémité.

Si l'on compare les 4 composantes verticales de deux suspensions appareillées, on constate que tant que les cordes génératrices  $\bar{A}'_k \bar{B}'_k$ ,  $A''_k B''_k$  sont voisines de la corde minimale on a  $W'_k > V''_k$  mais qu'il existe un appareillage et un seul pour lequel  $W'_k = V''_k$  et qu'au delà de cet appareillage  $W'_k$  est toujours inférieur à  $V''_k$ .

La relation qui donne la valeur  $V_k$  en fonction de la corde génératrice  $\bar{A}_k \bar{B}_k$  de la suspension correspondante, soit:

$$V_k = \frac{\widehat{A_k S}}{A_k B_k} \bar{A} \bar{B}$$

nous permet de démontrer:

1° que la valeur absolue de  $V_k$  ne cesse de décroître quand on passe de la suspension infiniment tendue (pour laquelle elle a une valeur infinie), à la suspension – encore tendue – à tangente horizontale à l'extrémité inférieure (corde génératrice  $S B_s$ ) auquel cas  $V_k$  a une valeur nulle;

2° qu'à partir de cette suspension tendue à tangente horizontale, la composante  $V_k$  prend des valeurs positives croissant indéfiniment au fur et à mesure que la suspension devient moins tendue, puis minimale, puis lâche.

Pour cela nous aurons recours à un raisonnement géométrique différentiel appliqué aux variations des longueurs de deux cordes génératrices infiniment voisines et de celles de leurs arcs.

Considérons d'abord une corde génératrice à suspension plongeante (c'est-à-dire une corde qui coupe l'axe vertical de la chaînette). Soit  $A(\bar{A}_k S)$  le petit élément



d'arc qui sépare l'extrémité inférieure de la corde  $\overline{A_k B_k}$  de celle infiniment voisine. Ce petit élément d'arc peut être confondu avec l'élément rectiligne de même longueur aligné suivant la tangente  $A_k T_k$ . Si la nouvelle corde infiniment voisine est au-dessus de  $\overline{A_k B_k}$ , sa longueur aura été accrue d'une quantité  $\Delta(A_k B_k)$ ; l'élément  $\Delta(\widehat{A_k S})$  et celui  $\Delta(A_k B_k)$  sont les deux côtés d'un triangle semblable au triangle  $A_k T_k B_k$ , donc on a la relation

$$\frac{\Delta(\widehat{A_k S})}{\Delta(A_k B_k)} = \frac{\overline{A_k T_k}}{\overline{A_k B_k}}.$$

Mais le point de rencontre  $T_k$  des deux tangentes à la chaînette aux extrémités de la corde  $A_k B_k$  (point  $T_k$ , qu'il paraîtrait opportun d'appeler « pôle de la corde  $A_k B_k$  ») est dans la moitié verticale de la chaînette opposée à celle du point  $A_k$ . Donc la développée à cette chaînette, à partir du sommet et vers le côté où se trouve  $A_k$ , coupe le vecteur  $A_k T_k$  en un point compris entre  $A_k$  et  $T_k$ , donc  $\overline{A_k T_k}$  est plus grand que l'arc  $\widehat{A_k S}$ .

On en déduit que  $\Delta(\widehat{A_k S})/\Delta(\widehat{A_k B_k})$  est supérieur à  $\widehat{A_k S}/\widehat{A_k B_k}$ .

Pour savoir ce qu'est devenu  $V_k$  au cours d'un déplacement infinitésimal vers le haut de la corde génératrice  $A_k B_k$  on comparera

$$\frac{\widehat{A_k S}}{\widehat{A_k B_k}} \longleftrightarrow \frac{\widehat{A_k S} + \Delta(\widehat{A_k S})}{\widehat{A_k B_k} + \Delta(A_k B_k)}.$$

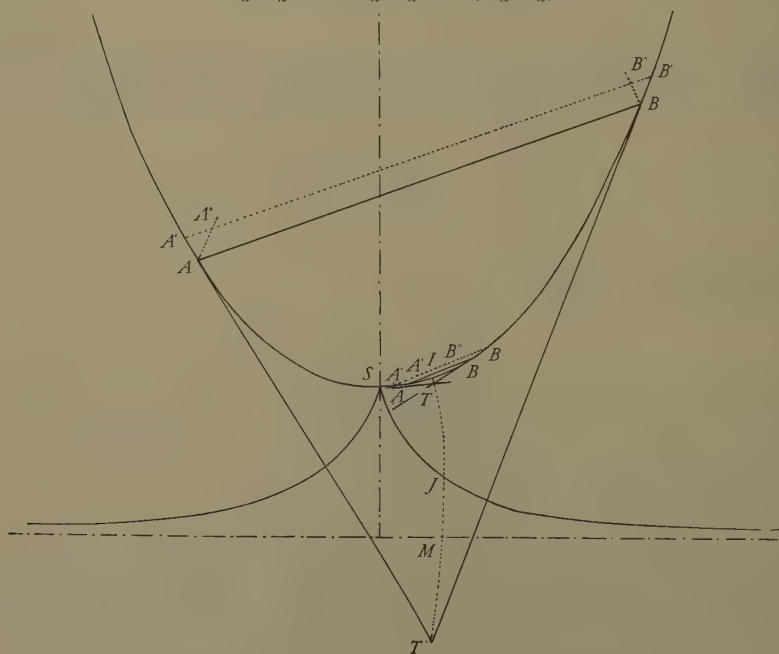


Figure 9

$$\overline{A' A''} = \overline{B' B''} = \Delta(\widehat{A B}); \quad \overline{A' A'} = \Delta(\widehat{A S}); \quad \overline{B B'} = \Delta(\widehat{B S}).$$

Or quand on augmente les deux termes  $n$  et  $d$  d'une fraction  $n/d$  de quantités respectivement égales à  $n'$  et à  $d'$ , dont le rapport  $n'/d'$  est supérieur à  $n/d$ , la nouvelle fraction augmente de valeur.

Donc  $V_k$  augmente de valeur quand sa corde génératrice s'élève; autrement dit quand le module de la suspension diminue.

Pour les cordes génératrices dont l'extrémité inférieure est du même côté que  $B_k$  par rapport à l'axe, la croissance de la valeur absolue de  $V$  au fur et à mesure que la suspension devient de plus en plus tendue est évidente – sans qu'il soit besoin de recourir à un raisonnement géométrique différentiel – puisque  $\widehat{A_k S}$  augmente (et tend vers  $\widehat{I S}$ ) tandis que  $\widehat{A_k B_k}$  décroît.

L'étude des composantes verticales

$$W_k = AB - \frac{B_k \widehat{B_k S}}{A_k B_k}$$

procède du même raisonnement géométrique différentiel, lequel fait conclure que  $W$ , toujours positive, a une valeur minimale pour la suspension engendrée par la corde  $A_k B_k$  dont le pôle  $T_k$  (point de rencontre des tangentes à la chaînette aux deux extrémités) se trouve sur la développée à la chaînette issue du sommet de celle-ci et tracée vers le côté où se trouve le point  $B_k$ .

Ce point  $J_k$  existe toujours car on démontre que la polaire caténique d'une direction  $i$  (lieu des points de rencontre des tangentes aux extrémités des cordes parallèles d'inclinaison  $i$ ) est une courbe qui ne peut pas avoir de tangente horizontale, ni aucun point d'intersection avec aucune autre de même nature. On en déduit notamment que quand le point  $\hat{I}$  de la chaînette où la tangente à l'inclinaison  $i$  (lequel point  $\hat{I}$  marque donc l'extrémité supérieure de la polaire caténique de la direction  $i$ ) se déplace sur la chaînette, le point  $\hat{J}$  de sa polaire se déplace dans le même sens sur la développée de la chaînette.

Parmi ces points  $J$  il convient de distinguer celui unique,  $J_0$ , où la tangente à la développée est aussi tangente à la chaînette. Les coordonnées de cette corde remarquable se calculent aisément à partir des deux équations

$$\frac{x_1 - x_0}{r} = \operatorname{ch} \frac{x_1}{r} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} \frac{x_1}{r} \operatorname{sh} \frac{x_0}{r} = -1$$

d'où

$$\frac{x_1}{r} = \operatorname{ch} \frac{x_1}{r} = -\operatorname{argsh} \left( \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{x_1}{r}} \right)$$

dont la racine est  $x_1/r = 1,20938$  d'où l'on déduit avec une précision de  $1/10000$   $x_0/r = -0,61548$ .

Avec une précision de  $1/200$  l'extrémité supérieure de cette corde remarquable peut être confondue avec le point de la chaînette où la tangente passe par le point de rencontre de l'axe et de la base

$$\frac{x}{r} = 1,1997 \# 1,20938.$$

Il suffit de considérer la figure où est représentée la tangente commune  $K_0 J_0$ , pour se rendre compte que toutes les autres cordes ayant leur pôle caténique sur la développée auront leur extrémité inférieure  $K_1$  comprise entre  $K_0$  et  $S$  et qu'à chaque point  $K_1$  correspondent deux pôles caténiques  $J'_1$  et  $J''_1$ , appartenant à des polaires issues de point  $I_1$  et  $I'_1$  (avec  $i'_1 < i_0 < i''_1$ ). On remarquera accessoirement

que l'angle en  $J_1$  est obtus tandis que celui en  $J_1''$  est aigu. Ainsi se trouve démontré que la composante verticale minimale de la traction à l'extrémité supérieure d'une catène de suspension est obtenue pour une catène tendue, comprise entre la catène minimale et celle à tangente inférieure horizontale.

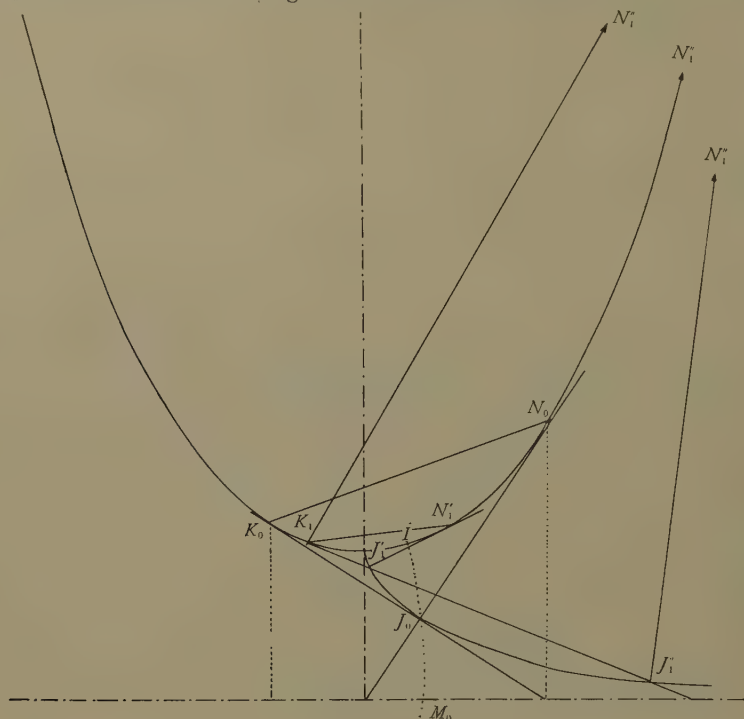


Figure 10

Un autre élément important de la structure des courbes (A) et (B) est leur asymptote, figurative des tractions aux extrémités des catènes de suspension infiniment tendues.

Ces asymptotes font avec l'axe des abscisses  $H$  un angle égal à celui,  $i$ , que fait la sustente  $AB$  avec l'horizontale. La mise en place de ces asymptotes sera achevée quand nous aurons démontré que chacune coupe l'axe des ordonnées à une distance de l'origine telle que ce vecteur mesure le poids d'une longueur de câble égale à  $\overline{AB}/2$ .

En effet, en comptant positivement les arcs de la chaînette de référence, dans le sens de gauche à droite (l'extrémité inférieure  $A$  étant supposée à gauche), on a en grandeur et signe :

$$V'_k = + \frac{\overline{AB}}{A'_k B'_k} \widehat{A'_k S} = + \frac{\overline{AB}}{A'_k B'_k} (\widehat{A'_k I} + \widehat{I S}),$$

$$W'_k = - \frac{\overline{AB}}{A'_k B'_k} \widehat{B'_k S} = - \frac{\overline{AB}}{A'_k B'_k} (\widehat{B'_k I} + \widehat{I S}).$$

La relation qui définit la composante horizontale  $H'_k$  d'une traction  $\vec{A}_k$  ou  $\vec{B}_k$  (composante horizontale mesurée positivement de gauche à droite) est

$$H'_k = -r \frac{\overline{AB}}{\overline{A'_k B'_k}}$$

pour toutes les tractions  $\vec{B}_k$  de l'extrémité supérieure et

$$H'_k = r \frac{\overline{AB}}{\overline{A'_k B'_k}}$$

pour toutes les tractions  $\vec{A}_k$  de l'extrémité inférieure de la sustente.

Tenant compte de ces deux relations, on peut donner aux expressions de  $V'_k$  et de  $W'_k$  les formes suivantes:

$$V'_k = + \frac{\overline{AB}}{\overline{A'_k B'_k}} \widehat{A'_k I} + H'_k \frac{\widehat{I S}}{r}, \quad W'_k = - \frac{\overline{AB}}{\overline{A'_k B'_k}} \widehat{B'_k I} + H'_k \frac{\widehat{I S}}{r}$$

où  $H'_k$  est la composante horizontale de  $\vec{A}_k$  (donc toujours positive) dans l'équation de  $V'_k$  et la composante horizontale de  $\vec{B}_k$  (donc toujours négative) dans l'équation de  $W'_k$ .

À la limite, quand la corde génératrice  $\overline{A'_k B'_k}$  se rapproche de plus en plus du point  $I$ , où la tangente a l'inclinaison  $i$  de la sustente,  $\widehat{A'_k I} / \overline{A'_k B'_k}$  tend vers  $I/2$ , tandis que  $\widehat{B'_k I} / \overline{A'_k B'_k}$  tend vers  $-I/2$ .

D'autre part,  $\widehat{I S} / r$  est égal à  $-\operatorname{tg} i$ .

On a donc à la limite

$$V' = + \frac{\overline{AB}}{2} - H' \operatorname{tg} i \quad \text{et} \quad W' = - \frac{\overline{AB}}{2} - H' \operatorname{tg} i.$$

Et par des raisonnements analogues, ne procédant que de considérations géométriques, on démontre aussi que les deux courbes ( $A$ ) et ( $B$ ) ne peuvent couper leur asymptote, ce qui achève de donner de la structure de ces courbes toutes les précisions suffisantes pour fonder sur elles l'étude que nous venons d'exposer concernant les câbles tracteurs.

### Summary

Many studies, and even official regulations use the name 'balance cable' to describe one of the two ends of the traction cable of a telpher.

This definition implies that the end of the cable referred to as balance cable plays a minor part in the efficient running of the telpher.

The author shows this interpretation is not justified, in the sense that the two ends of the cable are mechanically equivalent and indispensable to the system. The article shows also that the counter-balance cannot be used as a device adjusting stress during operation, this effect being obtained only through the action of the driving pulley.

(Reçu: le 11 août 1956.)



## Géométrie de la chaînette ou hypergéométrie

Par MARIE MARCEL NICOLAS, Paris<sup>1)</sup>

La solution d'un problème peut être obtenue soit par la méthode analytique, soit par le raisonnement ; la première montre la solution, la seconde la démontre. Une solution n'est parfaite que si elle a été démontrée.

La méthode analytique appliquée à l'étude des systèmes comprenant des câbles est généralement stérile parce qu'elle fait intervenir des relations entre des fonctions hyperboliques et leurs arguments et parce que rares sont celles de ces relations qui soient susceptibles d'une interprétation facile.

Le raisonnement demeure malaisé tant que l'on ne dispose pas d'une géométrie qui, par son essence, convienne à ce genre de problèmes.

En effet tout problème de mécanique où interviennent des câbles comporte toujours la confrontation de longueurs de câbles suspendus en des points donnés de l'espace avec les tractions qu'il convient d'exercer sur eux en ces points de façon à satisfaire à certaines conditions imposées. Ces câbles, supposés infiniment souples, mais non dépourvus de masse, se trouvent soumis à un champ de gravitation que l'on peut admettre d'intensité constante et de direction uniforme dans le cas des problèmes usuels.

Sous l'influence d'un tel champ, celui de la pesanteur, les câbles prennent la forme d'arcs de chaînette, de catènes, découpés sur des chaînettes dont l'axe est parallèle à la direction du champ, donc à la verticale.

La longueur des catènes ainsi tracées entre deux points  $A$  et  $B$  de l'espace est fonction non seulement de la distance mesurée rectilignement entre ces points, mais aussi de l'inclinaison du vecteur  $\overline{AB}$  au-dessus du plan horizontal et enfin de la traction exercée sur le câble en un de ces points, traction qui détermine le module de la chaînette sur laquelle est découpée la catène, et *vice versa*.

On conçoit combien est inadaptée à l'étude de tels problèmes une géométrie fondée sur l'emploi de la règle et du compas, c'est-à-dire sur une mesure rigide et rectiligne des distances.

Dans un monde soumis à une gravitation d'intensité infinie – ou ce qui revient au même dans un monde dont tous les matériaux seraient infiniment souples – les besoins de mesure et les moyens matériels de les satisfaire auraient imposé à des êtres raisonnables la conception d'une autre géométrie que celle usuelle. Cependant si les besoins et les moyens de mesure des êtres raisonnables

<sup>1)</sup> Secrétariat d'État aux Travaux Publics, aux Transports et au Tourisme.

vivant dans cette ambiance physique demeureraient limités à un univers perceptible infiniment petit, c'est-à-dire dont la plus grande dimension ne dépasserait pas le millionième ou le milliardième du plus petit module réalisable sur les règles caténaïres de mesure employées par ces êtres, les apparences leur feraient encore concevoir une géométrie euclidienne identique à celle dont nous nous servons.

Mais ceux-ci commenceraient à douter de l'universalité de cette géométrie au fur et à mesure que s'étendrait la portée de leurs perceptions.

Le même doute devait s'emparer des géomètres usant des règles rigides quand ils substituèrent à celles-ci des fils constitués par des rais lumineux soumis à des champs de gravitation.

Or l'étude des problèmes de câbles, même envisagés à la très petite échelle des besoins de la technique, impose l'emploi de cette géométrie où les distances sont mesurées suivant des catènes.

Nous nous proposons d'exposer les fondements de cette géométrie spéciale. Comme dans le cadre de ces Annales il serait impossible d'en faire un exposé complet, nous nous bornerons à décrire et à étudier sommairement celles des lignes essentielles au recours desquelles nous ont conduit nos études sur les câbles de téléphériques.

Pour la commodité de l'exposé nous appellerons cette géométrie «hypergéométrie» rappelant ainsi qu'elle traduit des relations entre des fonctions hyperboliques. Pour faciliter la confrontation de la géométrie usuelle avec l'hypergéométrie nous attribuerons aux lignes de cette dernière, qui tiennent le même rôle qu'en géométrie euclidienne, les mêmes désignations respectives précédées du préfixe «hyper»; nous aurons donc des hyperdroites, des hypercirconférences, des hypersphères, des hyperparallèles, des hypernormales, etc... etc... et même des hyperhyperboles.

Cette hypergéométrie en suggère d'autres, adaptées à des champs de gravitation qui n'auraient plus des intensités et des directions (au sens euclidien) uniformes mais qui correspondraient par exemple à des champs de gravitation concentriques, au sens usuel comme au sens hypergéométrique du terme.

### **Droite et hyperdroite**

La droite est la ligne selon laquelle on mesure la distance entre deux de ses points. L'hyperdroite sera donc une chaînette d'axe vertical, plus exactement d'axe parallèle à la direction uniforme du champ de gravitation d'intensité constante auquel sont soumises les règles de mesure supposées infiniment souples. L'hyperdroite est donc toujours contenue dans le plan vertical défini par les deux points dont on veut mesurer l'hyperdistance.

Le module de la chaînette de l'hyperdroite est fonction de la tension de la règle souple servant à mesurer les hyperdistances. L'hyperdistance entre deux

points dépend donc de la distance de ceux-ci, de l'inclinaison de leur alignement au-dessus de l'horizontale et de la tension de la règle.

La différence fondamentale entre la droite et l'hyperdroite est que les points de la première n'ont pas de personnalité géométrique tandis que ceux de la seconde en ont une.

Par exemple la direction de la tangente en un point de l'hyperdroite est fonction du point choisi sur celle-ci; de cette remarque il sera tiré parti dans l'étude de l'hyperplan.

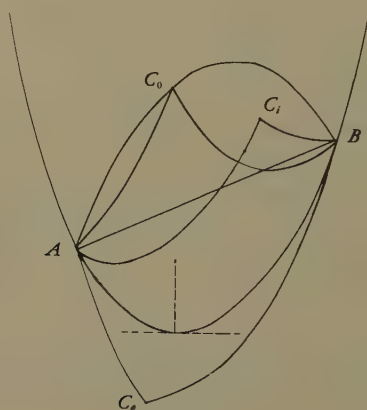


Figure 1

$$\widehat{AC_i} + \widehat{C_iB} < \widehat{AB}; \quad \widehat{AC_0} + \widehat{C_0B} = \widehat{AB}; \quad \widehat{AC_e} + \widehat{C_eB} > \widehat{AB}.$$

Mais il existe d'autres dissemblances remarquables entre la droite et l'hyperdroite.

En effet alors qu'entre deux points on ne peut tracer qu'une seule droite, on peut toujours tracer deux hyperdroites équimodulées entre deux points (l'une est une catène soumise à des efforts internes de traction, l'autre est la même catène symétrique de la précédente par rapport au milieu de  $\overline{AB}$  et soumise à des efforts internes de compression) (figure 1).

La ligne droite est la ligne suivant laquelle la distance mesurée entre les deux points  $A$  et  $B$  est la plus courte; plus exactement tout point  $C$  pris en dehors de la droite  $\overline{AB}$  détermine deux éléments de droite  $\overline{AC}$  et  $\overline{CB}$  dont la somme des longueurs est supérieure à  $\overline{AB}$ .

Les deux hyperdroites équimodulées passant par  $A$  et  $B$  délimitent deux zones dans le plan. Tout point  $C_e$  de la zone externe détermine deux hyperdroites équimodulées (dans le module considéré) telles que la somme des hyperdistances  $\widehat{AC_e} + \widehat{C_eB}$  soit supérieure à l'hyperdistance  $\widehat{AB}$ . Tout point  $C_i$

de la zone interne détermine deux segments d'hyperdroites équimodulées tels que  $\widehat{AC_i} + \widehat{C_iB}$  soit inférieure à  $\widehat{AB}$  mesurée suivant l'hyperdroite.

On en déduit que la propriété fondamentale des triangles, savoir que la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés, n'est plus une propriété absolue des hypercôtés d'un hypertriangle. Il suffit en effet qu'un sommet se trouve à l'intérieur de la zone délimitée par un hypercôté et le symétrique inversé de celui-ci pour que la longueur de cet hypercôté soit supérieure à la somme des deux autres; elle lui serait égale si le sommet était sur le symétrique inversé.

### Plan et hyperplan

Il existe du plan deux définitions: Le plan est la surface qui contient toute ligne droite joignant deux points quelconques de cette surface. Le plan est aussi la surface engendrée par la rotation d'une ligne droite autour d'un axe qui lui est orthogonal.

La première définition nous fera donc appeler hyperplan tout plan vertical, car seule une telle surface contient toutes les hyperdroites joignant deux quelconques de ses points.

La seconde définition nous mènera à la même conclusion quand nous aurons éliminé le cas d'une rotation autour d'un axe orthogonal à une hyperdroite au sens restreint, au sens ponctuel, du mot. Il faut en effet que, comme dans le cas de la droite, l'axe de rotation soit orthogonal à tous les éléments rectilignes infiniment petits qui constituent l'hyperdroite et non pas à un seul d'entre eux.

Or la seule direction orthogonale à tous les éléments rectilignes infiniment petits d'une hyperdroite est celle qui est normale au plan vertical qui contient cette chaînette.

### Circonférence et hypercirconférence

La circonférence est le lieu des points d'un plan qui sont à une distance donnée d'un point de ce plan. Les lignes droites qui servent à mesurer cette distance peuvent être considérées comme les arcs d'une chaînette infiniment tendue, donc comme des catènes ayant même module, savoir un module de valeur infinie.

Tenant compte de cette dernière remarque nous définissons l'hypercirconférence comme étant le lieu des points d'un hyperplan (plan vertical) qui sont à une distance donnée d'un point de cet hyperplan, étant entendu que cette distance est mesurée le long d'arcs découpés sur une chaînette d'un module donné (et d'axe vertical évidemment). Cette distance et ce module définissent l'hypercercle.



On voit immédiatement que les hypercirconférences concentriques ayant toutes même longueur d'hypperrayon (mais tracées sous des modules variables) sont toutes enchâssées les unes dans les autres, celles de modules supérieurs entourant celles de modules inférieurs. Les formes extrêmes de ces hypercirconférences, ayant même longueur d'hypperrayon, sont d'une part la circonférence de rayon  $l$ , d'autre part le vecteur vertical de longueur  $2l$  (figure 2).

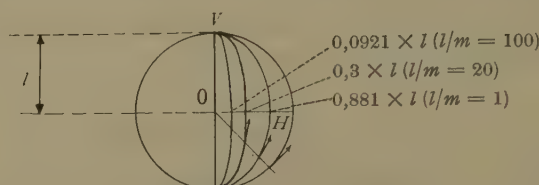


Figure 2

Hypercirconférences d'hypperrayon  $l$ , constant mais tracées sous divers modules.

$$\frac{OH}{l} = \frac{\operatorname{argsh} \frac{l}{2m}}{\frac{l}{2m}}$$

$\frac{l}{m}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	20	100	$\infty$
$\frac{OH}{l}$	1	0,98964	0,96248	0,88137	0,7966	0,7217	0,3	0,0921	0

Pour que l'hypercirconférence se distingue pratiquement de la circonférence, il faut que son hyper-rayon soit supérieur au module sous lequel elle est tracée.

Toutes les hypercirconférences concentriques d'hypperrayon  $l$  ont en commun les deux points situés sur la verticale du centre à une distance  $l$  de celui-ci.

Nous appellerons diamètre vertical d'une hypercirconférence le vecteur joignant les deux points de celle-ci situés sur la verticale passant par le centre, et diamètre horizontal le vecteur horizontal passant par le centre et limité par l'hypercirconférence.

Rapportée à son centre et à des coordonnées cartésiennes,  $u$  et  $v$ , dont les axes sont suivant le diamètre vertical et le diamètre horizontal, l'hypercirconférence d'hypperrayon  $l$ , mesuré sous le module  $m$ , a pour équation :

$$v^2 + 4m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{u}{2m} = l^2.$$

En effet entre les abscisses canoniques  $x_0$  et  $x_1$  de deux points d'une chaînette de module  $m$  et délimitant sur celle-ci un arc de longueur  $l$ , on a les

relations

$$m \left( \operatorname{sh} \frac{x_1}{m} - \operatorname{sh} \frac{x_0}{m} \right) = l = 2m \operatorname{sh} \left( \frac{x_1 - x_0}{2m} \right) \operatorname{ch} \left( \frac{x_1 + x_0}{2m} \right) \\ = 2m \operatorname{sh} \frac{u}{2m} \operatorname{ch} \left( \frac{x_1 + x_0}{2m} \right)$$

et

$$m \left( \operatorname{ch} \frac{x_1}{m} - \operatorname{ch} \frac{x_0}{m} \right) = v = 2m \operatorname{sh} \frac{u}{2m} \operatorname{sh} \left( \frac{x_1 + x_0}{2m} \right)$$

d'où

$$\frac{l^2}{4m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{u}{2m}} - \frac{v^2}{4m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{u}{2m}} = 1$$

et

$$l^2 - v^2 = 4m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{u}{2m}.$$

L'étude d'un arc de longueur constante tracé sur une chaînette montre que la projection horizontale de cet arc va en augmentant en même temps que diminue la longueur de sa corde quand diminue l'angle que fait sa corde avec l'horizontale.

Donc le rayon vecteur  $\overline{OP}$  d'un point  $P$  d'une hypercirconférence va en augmentant quand augmente l'angle que fait ce rayon vecteur avec l'horizontale. La valeur minimale du rayon vecteur est celle du rayon horizontal, égal à :

$$2m \operatorname{argsh} \frac{l}{2m}.$$

La propriété fondamentale de l'hypercirconférence concerne la direction de sa tangente en un point. En tout point d'une hypercirconférence la tangente est parallèle à la bissectrice des deux tangentes aux extrémités de l'hyperrayon du point.

En effet soient  $AT$  et  $\overline{BT}$  les deux tangentes d'une chaînette aux points  $A$  et  $B$  délimitant un arc de longueur  $l$ . Un arc de même longueur, avec extrémités infiniment voisines de celles du premier, aura ses extrémités  $A'$  et  $B'$ , sur les deux tangentes  $AT$  et  $\overline{BT}$ ; si  $A'$  est compris entre  $A$  et  $T$ , l'autre nouvelle extrémité,  $B'$ , sera au-delà du point  $B$  sur le vecteur  $TB$  (figure 3).

Si par  $B'$  nous menons un vecteur  $B'B''$  equipollent au vecteur  $A'A$ , le point  $B''$  sera un point de l'hypercirconférence de centre  $A$  et d'hyperrayon  $l = \widehat{AB} = \widehat{A'B'}$ . L'égalité de ces deux arcs infiniment voisins implique que  $\overline{A'A} = \overline{B'B'}$ , donc à la limite l'élément  $\overline{B'B''}$  de l'hypercirconférence est bien orthogonal à la bissectrice de l'angle extérieur à  $ATB$ , donc est parallèle à la bissectrice de cet angle.

L'étude des arcs de longueur constante tracés sur une chaînette montre que leur bissectrice tangentielle (bissectrice de l'angle formé par les deux tangentes

aux extrémités de l'arc) passe progressivement de la direction verticale à la direction horizontale quand la corde de l'arc passe de la direction horizontale à la direction verticale.

Cette étude montre aussi que quand la corde de l'arc de longueur constante passe progressivement de la position horizontale à la position verticale la bissectrice tangentielle, d'abord normale à la corde horizontale, ne cesse de

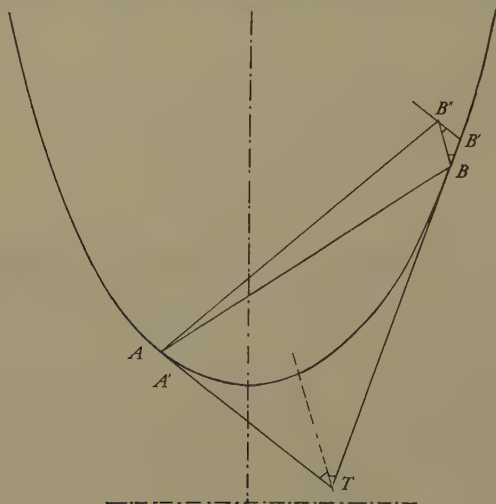


Figure 3

$$A A' = B B' = B' B''.$$

former avec la corde un angle aigu, pour atteindre à nouveau la valeur  $\pi/2$  quand la corde est devenue verticale.

On en déduit que la tangente à l'hypercirconférence s'incline progressivement de la verticale à l'horizontale quand le rayon vecteur  $\overline{OP}$  pivote de la position horizontale à la position verticale.

Toute hyperdroite passant par le centre d'une hypercirconférence ayant le même module est coupée par celle-ci en deux points dont l'hyperdistance est constante; celle-ci mesure la longueur de tous les hyperdiamètres de l'hypercirconférence.

L'hypercirconférence est susceptible d'une interprétation géométrique. Si on trace dans un plan vertical la courbe

$$y = 2 m \operatorname{sh} \frac{u}{2 m}$$

et si on projette cette courbe sur un plan horizontal passant par la ligne des abscisses  $u$  de telle sorte que le vecteur projetant satisfasse à la double con-

dition d'avoir une longueur constante  $l$  et d'être orthogonal à la ligne des abscisses  $u$ , on obtient l'hypercirconférence (figure 4):

$$l^2 - v^2 = 4 m^2 \operatorname{sh}^2 \frac{u}{2m}.$$

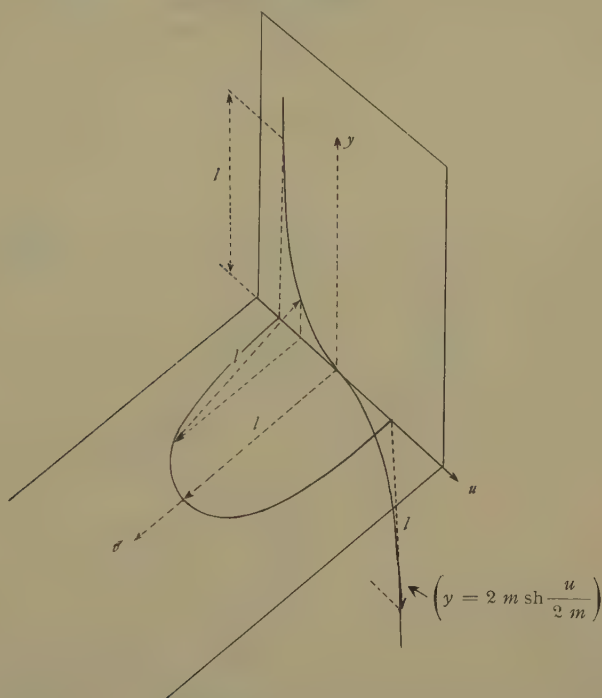


Figure 4

Si on considère tous les points des hypercirconférences concentriques de modules variables mais d'hyper rayon constant, qui sont alignés sur le centre commun, les tangentes en chacun de ces points aux diverses hypercirconférences ont des directions qui s'inclinent progressivement de la verticale à la direction orthogonale à celle de l'alignement quand on passe de l'hypercirconférence de module zéro (vecteur vertical) à l'hypercirconférence de module infini (circonférence de rayon  $l$ ).

En effet cette succession de catènes de longueur constante, à modules croissants est caractérisée par le fait que le rapport de la longueur de la sustente (corde de la catène) à la longueur de la catène sustendue va en augmentant en tendant vers l'unité.

Puisque ce rapport va en augmentant cela signifie que dans une chaînette de référence, de module fixe, la corde de la catène figurative de l'hyper rayon



se déplace parallèlement à elle-même en se rapprochant du point où elle devient tangente à la chaînette; la bissectrice de l'angle formé par ses tangentes s'incline alors progressivement de la verticale à la direction orthogonale à celle de la corde.

Cette propriété est d'ailleurs confirmée par l'analyse.

En effet en écrivant que la différentielle de  $l^2$  est nulle, on trouve pour l'inclinaison  $dv/du$  de la tangente à une hypercirconférence de module  $m$ :

$$\frac{dv}{du} = -\frac{m}{v} \operatorname{sh} \frac{u}{m} = -\frac{u}{v} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{u}{m}}{\frac{u}{m}}$$

où apparaît une des rares relations entre une fonction hyperbolique et son argument, dont l'interprétation ne présente aucune difficulté.

Deux hypercirconférences sont homothétiques quand leurs hyperrayons et leurs modules sont dans le même rapport.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux hypercirconférences soient homothétiques est que la droite qui joint leurs centres les coupe en des points où les tangentes soient parallèles.

Le rayon de courbure de l'hypercirconférence en un point  $(u, v)$  est donné par la formule:

$$\rho = -l \frac{\left(1 + 4 \frac{m^2}{l^2} \operatorname{sh}^4 \frac{u}{2m}\right)^{3/2}}{\operatorname{ch} \frac{u}{m} - 4 \frac{m^2}{l^2} \operatorname{sh}^4 \frac{u}{2m}}.$$

Aux extrémités du diamètre vertical ( $u = 0$ ) le rayon de courbure de l'hypercirconférence est égal à  $-l$ , donc indépendant du module, tandis qu'aux extrémités du diamètre horizontal le rayon de courbure est égal à

$$l \sqrt{1 + \frac{l^2}{4m^2}} \quad \text{ou} \quad l \frac{y_l}{m}$$

en appelant  $y_l$  l'ordonnée canonique de la corde horizontale qui découpe une catène de longueur  $2l$  dans la chaînette de module  $m$ . Ce rayon de courbure dépend donc du module. Cette différence remarquable entre ces deux rayons de courbure extrêmes s'explique géométriquement. Un diamètre vertical correspond en effet à un arc de chaînette de longueur  $l$ , situé à l'infini sur la chaînette et dont la corde a la même longueur que celle de l'arc. Une corde infiniment voisine procède de la précédente par deux translations des extrémités, translations qui sont égales et sensiblement confondues avec l'arc, donc avec sa corde.

D'autre part, dans la position à l'infini, la corde est normale à la bissectrice des deux tangentes à ses extrémités, donc les deux rayons vecteurs  $\overline{OP}$  normaux

à la tangente sont égaux. Il n'en est pas de même avec les cordes horizontales, où les cordes infiniment voisines sont bien normales à la tangente mais ne sont plus égales parce que les translations de leurs extrémités bien qu'également inclinées sur l'horizontale ne sont plus confondues avec celle-ci et de plus sont inclinées en sens contraires. Cette inclinaison influe donc sur la longueur du rayon de courbure, ce qu'exprime l'apparition du terme  $y_l/m$  dans la formule du rayon de courbure à une extrémité du diamètre horizontal.

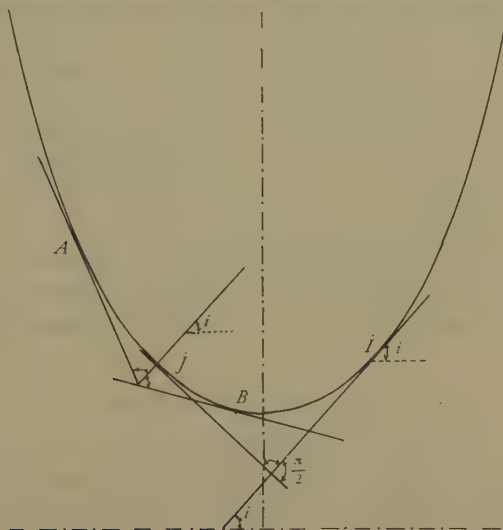


Figure 5

Par un raisonnement géométrique on établit une autre expression du rayon de courbure d'une hypercirconférence où apparaissent les rayons de courbure  $a$  et  $b$  de la chaînette aux deux extrémités  $A$  et  $B$  de la catène qui forme l'hyperrayon, et l'angle  $\theta$  des deux tangentes à la chaînette à ces extrémités.

Cette expression est

$$\rho = 4 \frac{a b}{a + b} \cos \frac{\theta}{2}.$$

Cette propriété fondamentale de la tangente en un point d'une hypercirconférence incite à étudier comment se répartissent sur une chaînette toutes les extrémités  $A$  et  $B$  des arcs  $\widehat{AB}$ , dont les tangentes aux extrémités forment des angles dont la bissectrice a une direction invariable  $i$  (figure 5).

Soit alors  $I$  le point de la chaînette dont la tangente a cette inclinaison  $i$ , et soit  $J$  le point où la tangente a l'inclinaison  $\hat{i} + \pi/2 - \hat{j}$  (nous dirons que ces points  $I$  et  $J$  sont en correspondance orthogonale). On démontre alors que les

extrémités  $A$  et  $B$  d'un arc dont la bissectrice tangentielle (bissectrice de l'angle formé par les deux tangentes à l'extrémité de l'arc) a la direction  $\hat{i}$  sont liées par la relation :

$$\frac{\widehat{JB}}{\widehat{JA}} = - \frac{\widehat{IB}}{\widehat{IA}}.$$

Sur la chaînette les deux points  $A$  et  $B$  sont donc en correspondance anharmonique avec les points  $I$  et  $J$  (qui eux sont en correspondance orthogonale) définissant la direction de la bissectrice.

On retrouve ici une analogie avec la correspondance anharmonique qui existe entre les points d'intersection sur la base commune à tous les triangles de sommet donné et constitués par deux autres côtés issus de ce sommet et formant des angles dont les bissectrices ont une direction fixe.

Par un point extérieur à une hypercircconférence on peut toujours mener deux hyperdroites, équimodulées, qui lui soient tangentes. Si cette hypercircconférence a un hyperrayon dont la longueur est supérieure à son module, il existe alors aux extrémités de son diamètre vertical une zone intérieure, par les points de laquelle on peut tracer une hyperdroite tangente à l'hypercircconférence.

### Normale et hypernormale

La normale à une courbe en un point de celle-ci est le lieu des centres de toutes les circonférences qui sont tangentes à cette courbe en ce point ; l'hypernormale à une hypercourbe en un point de celle-ci sera le lieu des centres de toutes les hypercircconférences d'un module donné mais d'hyperrayon quelconque et qui sont tangentes à l'hypercourbe au point considéré.

Si on remarque que dans le cas de la normale à une droite, les circonférences peuvent être assimilées à des hypercircconférences de module infini, donc ayant même valeur que celui de la courbe (la droite) à laquelle elles sont tangentes, nous pourrions préciser que l'hypernormale à une hyperdroite est le lieu des centres des hypercircconférences d'hyperrayon quelconque mais de module égal à celui de l'hyperdroite (chaînette), et tangentes à celle-ci en un point donné.

D'ailleurs la remarque faite *in fine* du paragraphe consacré aux hypercircconférences permet déjà de conclure que si on fait varier le module d'une hypernormale (c'est-à-dire le module des hypercircconférences tangentes) on passe de l'une à l'autre par une homothétie dans le rapport des modules ayant pour centre le point de contact.

Cette déformation homothétique des hypernormales, quand leur module varie, fait passer progressivement celles-ci de la droite verticale (module zéro des hypercircconférences) à la droite orthogonale à la tangente à la chaînette au point considéré (module infini des hypercircconférences), les formes intermédiaires n'étant nullement des droites.

Sous le bénéfice de cette remarque nous étudierons l'hypernormale équi-modulée, c'est-à-dire celle qui est le lieu des centres des hypercirconférences de module égal à celui de l'hyperdroite.

Une hypernormale équi modulée à une hyperdroite ne peut couper celle-ci: il faudrait pour cela qu'il existât sur une chaînette une catène dont la bissectrice tangentielle (bissectrice de l'angle formé par les deux tangentes aux extrémités) soit parallèle à l'une des tangentes d'extrémité, ce qui est impossible. Mais une hypernormale équi modulée à une hyperdroite devient tangente à celle-ci au point à l'infini sur la branche opposée à celle où se trouve le pied de l'hypernormale. Si l'hypernormale est tracée sous un module supérieur à celui de l'hyperdroite, alors elle coupe celle-ci; inversement, tracée sous un module inférieur elle ne la coupe pas, mais lui devient parallèle – et nontangente – au point à l'infini (figure 6).

Soit  $x$  l'abscisse canonique d'un point d'une hyperdroite (chaînette) de module  $m$ .

Rapportée à des axes orthogonaux, parallèles aux axes canoniques de la chaînette et ayant leur origine en ce point, l'hypernormale, équi modulée, à la chaînette en ce point a pour équation :

$$v = -m \frac{\operatorname{sh} \frac{u}{m}}{\operatorname{sh} \frac{x}{m}}.$$

Rapportées aux axes canoniques, les coordonnées

$$y = v + m \operatorname{ch} \frac{x}{m}, \quad X = u + x$$

de cette hypernormale satisfont donc à l'équation :

$$Y = m \operatorname{ch} \frac{x}{m} + m \operatorname{ch} \frac{X}{m} - \frac{m}{\operatorname{th} \frac{x}{m}} \operatorname{sh} \frac{X}{m}.$$

Toutes les hypernormales aux divers points d'une hyperdroite, équi modulées avec celle-ci, ont une enveloppe dont l'équation est :

$$Y = m \operatorname{ch} \frac{X}{m} + m \left[ 1 + \left( \operatorname{sh} \frac{X}{m} \right)^{2/3} \right]^{3/2}.$$

Entre l'abscisse canonique  $X$  du point caractéristique d'une hypernormale à une chaînette et l'abscisse  $x$  du pied de cette hypernormale on a la relation :

$$\operatorname{sh} \frac{X}{m} = -\operatorname{sh}^3 \frac{x}{m}.$$





par la formule :

$$l^2 = \left(Y - m \operatorname{ch} \frac{X}{m}\right)^2 + 2 \left[ \sqrt{r^2 \left(\operatorname{sh} \frac{x}{m}\right)^2 - 3} \left(Y - m \operatorname{ch} \frac{X}{m}\right)^2 - m^2 \right].$$

La courbe enveloppe des hypernormales à une hyperdroite partage le plan en deux zones. De tout point de la zone supérieure – que nous appellerons zone tripode – on peut tracer trois hypernormales à l'hyperdroite, savoir une dont le pied  $P_1$  est du même côté de l'axe que le point, et les deux autres ayant leurs pieds  $P_2$  et  $P_3$  de l'autre côté de l'axe (figure 7).

Ce point tripode est donc le centre de trois hypercirconférences tangentes à l'hyperdroite. Celle dont le point de tangence est du même côté de l'axe a l'hyper rayon le plus court et le point de tangence le plus élevé au-dessus de la base. Celle dont le point de tangence est intermédiaire entre les deux autres est

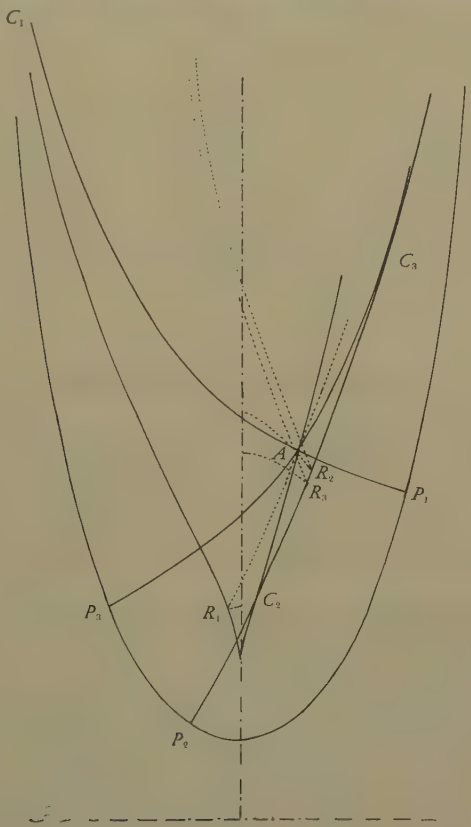


Figure 7

Point tripode A.

Ses 3 hypernormales, de pieds  $P_1, P_2, P_3$  et de points caractéristiques  $C_1, C_2, C_3$ . Ses 3 hyperparallèles de points de rebroussement  $R_1, R_2, R_3$  (on n'a figuré que la moitié de chaque hyperparallèle).

celle dont l'hyperrayon est le plus long, et dont le point de tangence est aussi le plus bas; son rayon de courbure en ce point est supérieur à celui de la chaînette, ce qui n'est pas le cas pour les deux autres hypercirconférences concentriques tangentes à la chaînette. En résumé des trois hypercirconférences tangentiellles de centre  $N$ , l'une, celle à point de tangence  $P_1$ , est entièrement dans la zone concave de l'hyperdroite (chaînette), celle à point de tangence  $P_2$  est à l'extérieur de l'hyperdroite dans sa partie inférieure et ne pénètre dans la zone concave qu'en des points situés au-dessus de  $P_1$  et de  $P_3$ ; enfin l'hypercirconférence à point de tangence  $P_3$  est à l'intérieur de la zone concave aux abords du point  $P_3$ , mais coupe l'hyperdroite en un point compris entre  $P_2$  et  $P_1$  pour sortir de la zone concave et y rentrer en un point de l'hyperdroite sis au-dessus de  $P_1$ .

D'un point de la zone intérieure – que nous appellerons zone monopode – on ne peut mener qu'une seule hypernormale à l'hyperdroite.

D'un point de la courbe enveloppe on peut évidemment mener deux hypernormales, l'une courte ayant son pied du même côté de l'axe que le point, tandis que l'autre longue a son pied de l'autre côté: le rayon de courbure de l'hypercirconférence tangente à la chaînette correspondant à l'hypernormale longue est, au point de tangence, égal à celui de la chaînette.

Ces particularités des hypernormales sont analogues à celles que présentent les normales à une chaînette, avec cette différence que dans ce dernier cas la courbe enveloppe coupe la chaînette, étendant ainsi la zone tripode à l'extérieur de la zone concave de la chaînette.

### Parallèles et hyperparallèles

Utilisant la même analogie que celle qui nous a fait passer de la définition de la normale à celle de l'hypernormale, nous définissons l'hyperparallèle à une hyperdroite tracée à une hyperdistance  $l$  équimodulée, de celle-ci, comme le lieu des centres de toutes les hypercirconférences, équimodulées également, tangentes à cette hyperdroite et dont les hyperrayons ont une longueur commune  $l$ .

C'est en somme la ligne que décrit le centre d'une hypercirconférence quand on fait glisser celle-ci tangentielllement (en la maintenant verticale évidemment) le long d'une chaînette de même module (figure 8).

Il est aisé de démontrer qu'en tout point d'une hyperparallèle la tangente est parallèle à celle à la chaînette au point où l'hypercirconférence qui admet le premier point pour centre est tangente à cette chaînette.

En effet si on considère deux centres voisins  $C_0, C_1$  de deux hypercirconférences égales et tangentes l'une en  $P_0$ , l'autre en  $P_1$  à l'hyperdroite, on peut dans l'hypercirconférence de centre  $C_0$  tracer le vecteur  $\overline{C_0 P_1}$ , équipollent au vecteur  $\overline{C_1 P_1}$ .

D'autre part on a l'égalité géométrique :

$$C_0 C_1 = \overline{C_0 P_0} + \overline{P_0 P_1} + \overline{P_1 C_1} = \overline{P_0 P_1} + \overline{C_0 P_0} + \overline{P_1 C_0} = \overline{P_0 P_1} + \overline{P_1 P_0}$$

et à la limite quand  $C_1$  est très voisin de  $C_0$ , les deux vecteurs  $\overline{P_0 P_1}$  et  $\overline{P_1 P_0}$  étant confondus en direction, avec la tangente commune en  $P_0$  à la chaînette

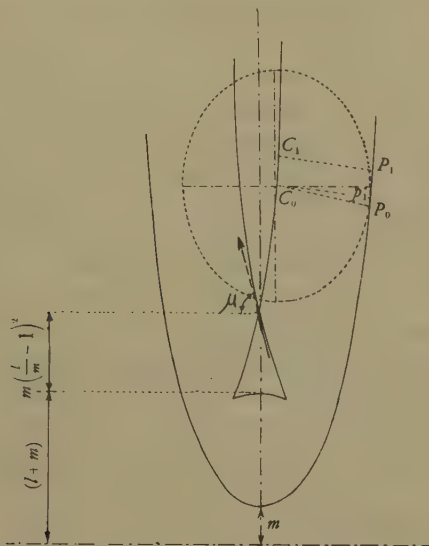


Figure 8

Hyperparallèle, à une hyperdistance  $l$ , à une hyperdroite de module  $m$  (cas de  $l/m = 3$ ).

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\sqrt{\left(\frac{l^2}{m^2} - 1\right) \left(\frac{l^2}{m^2} + 3\right)}}{2}$$

et à l'hypercircconférence, l'élément tangential  $\overline{C_0 C_1}$  de l'hyperparallèle est bien parallèle à cette tangente.

De cette égalité géométrique, combinée avec le parallélisme des tangentes, on déduit que le rayon de courbure à l'hyperparallèle en un point  $C_0$  est égal à la différence des rayons de courbure en  $P_0$ , à la chaînette et à l'hypercircconférence.

Tant que l'hyperdistance  $l$ , qui définit le parallélisme, est moindre que le module  $m$  de l'hyperdroite, les hyperparallèles correspondantes présentent l'aspect d'une ligne continue, ne coupant qu'une seule fois l'axe de l'hyperdroite, avec une tangente horizontale en ce point.

Pour les hyperdistances supérieures au module  $m$ , la forme des hyperparallèles est celle d'une ligne qui coupe trois fois l'axe de l'hyperdroite. La première intersection, celle-là à tangente horizontale, marque un point à une distance  $l$



au-dessus du sommet; les deux autres intersections, croisées, se font à un point supérieur.

Ces hyperparallèles se terminent vers le haut par des branches qui tendent à devenir parallèles à l'hyperdroite, et à une distance de celle-ci égale à

$$2 m \operatorname{argsh} \frac{l}{2 m}$$

(longueur du rayon vecteur horizontal).

De part et d'autre de l'axe et à une cote inférieure à celle du franchissement horizontal de l'axe, l'hyperparallèle présente un point de rebroussement, sis évidemment sur la courbe enveloppe des hypernormales: l'hypercirconférence, dont le point de rebroussement est le centre, a en son point de tangence avec la chaînette même rayon de courbure que celle-ci en ce même point. Le rayon de courbure  $y$  est bien nul comme nous l'avons démontré.

Et on aboutit à cette conclusion que par un point situé dans la zone tripode des hypernormales on peut mener trois hyperparallèles à une hyperdroite, et deux seulement si le point est sur la ligne enveloppe des hypernormales; et une, si le point est dans la zone monopode.

Les coordonnées  $Y$  et  $X$  d'une hyperparallèle à la distance  $l$  sont données, en fonction des abscisses canoniques  $x$  des points de la chaînette, par les formules:

$$X = x + m \operatorname{argsh} \left( -\frac{v}{m} \operatorname{sh} \frac{x}{m} \right), \quad Y = m \operatorname{ch} \frac{x}{m} + v$$

où  $v$  est exprimé par

$$v^2 = l^2 + 2 m^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{m} - 2 m \sqrt{m^2 \operatorname{ch}^4 \frac{x}{m} + l^2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{m}}.$$

Ces formules permettent de retrouver, au terme de laborieux calculs, la propriété fondamentale du parallélisme des tangentes, aisément démontrée par la géométrie.

La figure ci-contre montre la forme générale d'une hyperparallèle à une hyperdroite, tracée à une hyperdistance de celle-ci supérieure à son module  $m$  (figures 8 et 9).

Pour résumer cette étude de l'hyperparallélisme nous remarquerons que pour des êtres raisonnables dont les perceptions visuelles ne dépassent pas le module de leurs règles (instruments) de mesure il est conforme à leur bon sens que par un point on ne puisse mener qu'une seule parallèle à une droite; ce n'est que quand la portée de leurs perceptions dépassera ce module qu'un nouveau bon sens leur fera trouver tout naturel que par un point on puisse mener trois parallèles – et à des distances inégales – à la ligne qui leur tient lieu de ligne droite, c'est-à-dire de tracé de mesure.

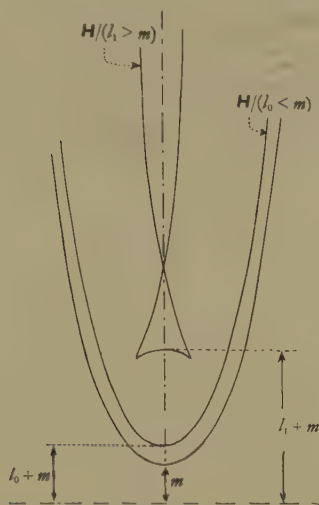


Figure 9

$(H/l_0 < m)$ : Hyperparallèle à une hyperdroite tracée à une hyperdistance  $l_0 < m$ .  
(Son hyperparallélisme diffère peu en apparence du parallélisme euclidien.)

### Cas particulier de la courbe enveloppe $\Phi$ , des chaînettes isosthènes d'un faisceau

Le rôle fondamental tenu par cette courbe enveloppe dans l'étude des problèmes mécaniques posés par le fonctionnement des téléphériques et des télésièges, nécessite un examen spécial quant aux hypernormales et hyperparallèles à cette courbe.

On sait que chaque point de cette courbe marque le contact avec une chaînette isosthène du faisceau, dont le module  $m$  est d'autant plus grand que la cote du point au-dessus de la base du faisceau est plus élevée, en même temps qu'est plus voisine de la verticale la tangente ( $i_k$  désignant l'angle que celle-ci fait avec l'horizontale (figure 10).

Ainsi à la différence d'une hyperdroite, il convient d'assigner à chaque point  $\varphi_k$  de la courbe  $\Phi$  un module particulier, celui ( $m_k$ ) de la catène isosthène, dont ce point est le point caractéristique.

A chaque point de la courbe  $\Phi$  correspondra donc une hypernormale définie par son pied  $\varphi_k$ , son module  $m_k$  et l'inclinaison  $i_k$  de l'élément tangentiel auquel doivent être tangentes les hypercirconférences de module  $m_k$ , dont les centres traceront cette hypernormale.

Ces hypernormales ( $\varphi_k$ ), dismodulées (c'est-à-dire dont le module varie avec leur pied  $\varphi_k$ ) ont une courbe enveloppe, qui est le lieu de leurs points caractéristiques; le point caractéristique  $C_k$  de l'hypernormale ( $\varphi_k$ ) est le



auquel cas l'hyperellipse se réduit au point  $M$ , milieu de  $\overline{F_1 F_2}$ , tandis que pour les modules intermédiaires entre  $m$  et  $m/2$  les hyperellipses se présentent comme des courbes progressivement enchâssées les unes dans les autres (figure 11).

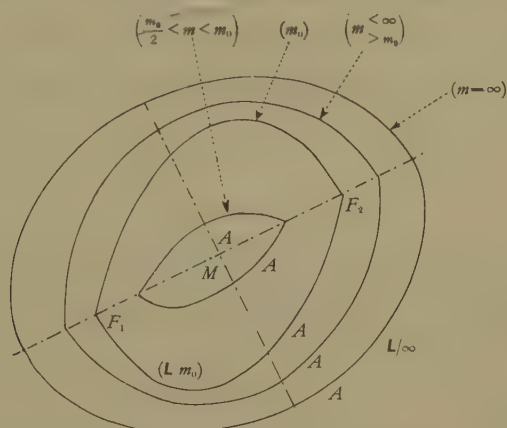


Figure 11

Hyperellipses de foyers  $F_1, F_2$  et longueur  $L = \widehat{F_1 A} + \widehat{F_2 A}$ .  
 $\widehat{F_1 A} + \widehat{F_2 A} = L/(m_0)$ ;  $\widehat{F_1 A} + \widehat{F_2 A} = L/(m = \infty)$ ;  $\widehat{M F_1} + \widehat{M F_2} = L/(m/2)$ .

### Summary

Differential calculus is proving inefficient to solve problems of mechanics dealing with ropes, unless one satisfies oneself with rough approximations.

Ordinary or Euclidean geometry is also proving useless: The author shows that in order to solve such problems as described before, one has to use a special branch of geometry. Distances are no longer measured along rigid straight rules, but along the catenary curves in question.

The fundamental characteristics of this hypergeometry, with some of their more striking results, are described in the following study.

(Reçu: le 11 août 1956.)



# Stresses Due to a Nucleus of Thermo-Elastic Strain (i) in an Infinite Elastic Solid With Spherical Cavity and (ii) in a Solid Elastic Sphere

By BRAHMA DEV SHARMA, Pilani, Rajasthan, India<sup>1)</sup>

## Abstract

In this paper solutions in series form for the stresses due to a nucleus of thermo-elastic strain in an infinite elastic solid in the presence of a spherical cavity and also in an elastic solid sphere have been found.

## Nomenclature

The following nomenclature has been used in this paper:

$x, y, z$	Cartesian coordinates;
$r, \theta, \varphi$	spherical polar coordinates;
$u_x, u_y, u_z$	components of displacement in Cartesian coordinates;
$u_r, u_\theta, u_\varphi$	components of displacement in spherical coordinates;
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\varphi, \tau_{r\theta}, \tau_{r\varphi}, \tau_{\theta\varphi}$	components of stress in spherical coordinates;
$E$	coefficient of elasticity in stress;
$G$	coefficient of elasticity in shear;
$\alpha$	coefficient of linear expansion;
$\nu$	Poisson's ratio.

## Introduction

The thermal stress problem of an infinite elastic solid at zero temperature except for a heated region has been solved by GOODIER [1]<sup>2)</sup>. In this paper the infinite solid is considered to have a spherical cavity while the heated element is at some finite distance from it in the solid. Numerical results for the stress and displacements on the surface of the cavity are given. The results have been compared with the corresponding numerical values appropriate to the two-dimensional analog of the present problem. A second problem of a solid sphere at zero temperature having a heated nucleus inside has also been solved. The stresses and displacements on its surface have been calculated.

<sup>1)</sup> Birla College.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 150.

### Solution

Consider an infinite elastic solid at zero temperature, while an element of volume  $d\Omega$  at  $(c, 0, 0)$  is heated to a temperature  $T$ . The displacement in this case is given by the gradient of  $\chi$  where

$$\chi = \frac{A}{2G} \times \frac{1}{(r^2 - 2rc \cos \theta + c^2)^{1/2}}, \quad (1)$$

in which

$$A = -2G \frac{m T d\Omega}{4\pi} \quad \text{and} \quad m = \frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu}.$$

Hence

$$\left. \begin{aligned} 2Gu_r &= -\frac{A(r - c \cos \theta)}{(r^2 - 2rc \cos \theta + c^2)^{3/2}}, \\ 2Gu_\theta &= -\frac{A c \sin \theta}{(r^2 - 2rc \cos \theta + c^2)^{3/2}}, \\ u_\varphi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A \frac{2r^2 + 3c^2 \cos^2 \theta - 4rc \cos \theta - c^2}{(r^2 - 2rc \cos \theta + c^2)^{5/2}}, \\ \sigma_\theta &= A \left\{ \frac{3c^2 \sin^2 \theta}{(r^2 - 2rc \cos \theta + c^2)^{5/2}} - \frac{1}{(r^2 - 2rc \cos \theta + c^2)^{3/2}} \right\}, \\ \sigma_\varphi &= -A \frac{1}{(r^2 - 2rc \cos \theta + c^2)^{3/2}}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{A}{r} \times \frac{3c \sin \theta (r - c \cos \theta)}{(r^2 - 2rc \cos \theta + c^2)^{5/2}}, \\ \tau_{r\varphi} &= \tau_{\theta\varphi} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

We denote this displacement and stress field in the infinite solid by  $[\chi]$ .

The stress in the infinite solid being known, in both the problems under consideration we have to free the spherical surface of traction. In the first case the nucleus is outside the surface while in the second case it is inside it. These problems can be attacked by any one of the various stress-function approaches to the axisymmetric problems of elasticity. We shall utilize the approach originated by BOUSSINESQ according to which the general solution of displacement equation of equilibrium, in case of torsion free rotational symmetry, and the absence of body forces, is representable as the sum of two displacement fields.

$$2G(u_x, u_y, u_z) = \text{grad } \varphi, \quad (4)$$

$$2G(u_x, u_y, u_z) = \text{grad}(z\psi) - 4(1-\nu)(0, 0, \psi), \quad (5)$$

where  $\nabla^2 \varphi = \nabla^2 \psi = 0$ .

These basic displacement and associated fields of stress can be transformed into general orthogonal axisymmetric coordinates. We here obtain the particular solutions by introducing the interior and exterior spherical harmonics of integral order as generating stress functions  $\varphi$  and  $\psi$  [2].

We consider two pairs of aggregates of harmonic stress functions

$$\varphi_n(r, \theta) = r^{-n-1} P_n(\cos \theta), \quad \psi_n(r, \theta) = r^{-n-1} P_n(\cos \theta), \quad (6)$$

and

$$\varphi'_n(r, \theta) = r^n P_n(\cos \theta), \quad \psi'_n(r, \theta) = r^n P_n(\cos \theta), \quad (7)$$

in which  $P_n$  denotes the Legendre polynomial of order  $n$ . The stress functions defined in (6) represent exterior spherical harmonics while those in (7) represent the interior ones. The particular solutions generated by  $\varphi_n, \psi_n, \varphi'_n$  and  $\psi'_n$  will be distinguished by  $[A_n], [E_n], [C_n]$  and  $[F_n]$  respectively. Considerable simplification arises from a replacement of solutions  $[E_n]$  and  $[F_n]$  with the linear combinations

$$[B_n] = (2n+1)[E_n] - (n+4-4\nu)[A_{n-1}], \quad (8)$$

$$[D_n] = (2n+1)[F_n] - (n-3+4\nu)[C_{n+1}]. \quad (9)$$

We now give the displacement and stress fields appropriate to the solutions  $[A_n], [B_n], [C_n]$  and  $[D_n]$ . With the auxiliary notation

$$\bar{p} = \cos \theta, \quad \bar{\dot{p}} = \sin \theta \quad (10)$$

we obtain the solutions for  $[A_n]$

$$2G u_r = -\frac{n+1}{r^{n+2}} P_n, \quad 2G u_\theta = -\frac{\bar{\dot{p}} P'_n}{r^{n+2}}, \quad u_\varphi = 0, \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{(n+1)(n+2)}{r^{n+3}} P_n, \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{r^{n+3}} [P'_{n+1} - (n+1)(n+2)P_n], \\ \sigma_\varphi &= -\frac{P'_{n+1}}{r^{n+3}}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{n+2}{r^{n+3}} \bar{\dot{p}} P'_n, \\ \tau_{r\varphi} &= \tau_{\theta\varphi} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

for  $[B_n]$ 

$$\left. \begin{aligned} 2 G u_r &= -\frac{(n+1)(n+4-4\nu)}{r^{n+1}} P_{n+1}, \\ 2 G u_\theta &= -\bar{p} \frac{n-3+4\nu}{r^{n+1}} P'_{n+1}, \\ u_\varphi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= (n+1)[(n+1)(n+4)-2\nu] \frac{P_{n+1}}{r^{n+2}}, \\ \sigma_\theta &= -\frac{1}{r^{n+2}} [(n+1)(n^2-n+1-2\nu)P_{n+1} - (n-3+4\nu)P'_n], \\ \sigma_\varphi &= -\frac{1}{r^{n+2}} [(1-2\nu)(n+1)(2n+1)P_{n+1} + (n-3+4\nu)P'_n], \\ \tau_{r\theta} &= (n^2+2n-1+2\nu)\bar{p} \frac{P'_{n+1}}{r^{n+2}}, \\ \tau_{r\varphi} &= \tau_{\theta\varphi} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

for  $[C_n]$ 

$$2 G u_r = n r^{n-1} P_n, \quad 2 G u_\theta = -\bar{p} r^{n-1} P'_n, \quad u_\varphi = 0, \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= n(n-1) r^{n-2} P_n, \\ \sigma_\theta &= r^{n-2} [P'_{n+1} - (n^2+n+1)P_n], \\ \sigma_\varphi &= r^{n-2} [-P'_{n+1} + (2n+1)P_n], \\ \tau_{r\theta} &= -(n-1)\bar{p} r^{n-2} P'_n, \\ \tau_{\theta\varphi} &= \tau_{r\varphi} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

for  $[D_n]$ 

$$\left. \begin{aligned} 2 G u_r &= n(n-3+4\nu) r^n P_{n-1}, \\ 2 G u_\theta &= -(n+4-4\nu) r^n P'_{n-1}, \\ u_\varphi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= [n^2(n-3)-2\nu n] r^{n-1} P_{n-1}, \\ \sigma_\theta &= r^{n-1} [(n+4-4\nu)P'_n - n(n^2+3n+3-2\nu)P_{n-1}], \\ \sigma_\varphi &= r^{n-1} [-(n+4-4\nu)P'_n + n(2n+1)(1-2\nu)P_{n-1}], \\ \tau_{r\theta} &= (2-n^2-2\nu) r^{n-1} \bar{p} P'_{n-1}, \\ \tau_{r\varphi} &= \tau_{\theta\varphi} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$



### *Infinite Elastic Solid With Spherical Cavity*

We take the centre of the cavity as the origin and the radius to be unity. The heated particle is at  $(c, 0, 0)$  such that  $c > 1$ . In order to free the cavity from traction

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = \tau_{r\varphi} = 0 \quad (r = a, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi). \quad (19)$$

Also, all the stress components must be zero at infinity.

In the region under consideration,  $r \geq 1$ , the stress systems  $[A_n]$  and  $[B_n]$  are uniform, and hence we can superpose them on the solution  $[\chi]$  for the infinite solid. We assume solution  $[S]$  to the problem characterized by the boundary condition (19) in the form

$$[S] = \chi + \sum \{a_n[A_n] + b_n[B_{n-1}]\}. \quad (20)$$

Now, for the solution  $[\chi]$  on  $r = 1$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r = f_1(\theta) &= A \frac{2 + 3c^2 \cos^2 \theta - 4c \cos \theta - c^2}{(1 - 2c \cos \theta + c^2)^{5/2}}, \\ \tau_{r\theta} = f_2(\theta) &= A \frac{3c \sin \theta (1 - c \cos \theta)}{(1 - 2c \cos \theta + c^2)^{5/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$f_1(\theta)$  and  $f_2(\theta)$  can be expressed in Legendre series and when  $c > 1$  we get:

$$\left. \begin{aligned} f_1(\theta) &= A \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) \frac{P_n(\cos \theta)}{c^{n+1}}, \\ f_2(\theta) &= -A \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \frac{P'_n(\cos \theta)}{c^{n+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

A little reduction shows that condition (19) is satisfied if

$$a_n (n+1) (n+2) + b_n n (n^2 + 3n - 2\nu) + A \frac{n(n-1)}{c^{n+1}} = 0,$$

$$a_n (n+2) + b_n (n^2 - 2 + 2\nu) - \frac{A(n-1)}{c^{n+1}} = 0,$$

or

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{A n (n-1) (2n-1)}{2 \{1 + n + n^2 - \nu (2n+1)\} c^{n+1}}, \\ b_n &= -\frac{A (n-1) (2n+1)}{2 \{1 + n + n^2 - \nu (2n+1)\} c^{n+1}} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$(n = 1, 2, \dots).$

The value of these coefficients together with equations (20), (2), (3), and (11) to (14) constitute the complete solution of the problem.

Now, we find the numerical results when  $\nu = 1/4$  and  $c = 5$ . The displacement components on the cavity are shown in Figure 1. Figure 2 shows the stress concentration on the cavity. There are two rings on the cavity where  $\sigma_\theta$  is zero. It is interesting to note that the maximum value of  $\sigma_\varphi - \sigma_\theta$  occurs near about the same value of  $\theta$ ,  $70^\circ$  nearly, where  $u_r$  vanishes. The stresses around a

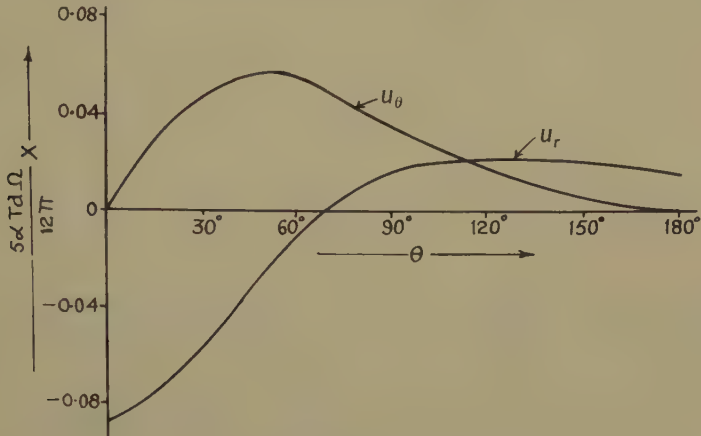


Figure 1  
Deformation of the spherical cavity.

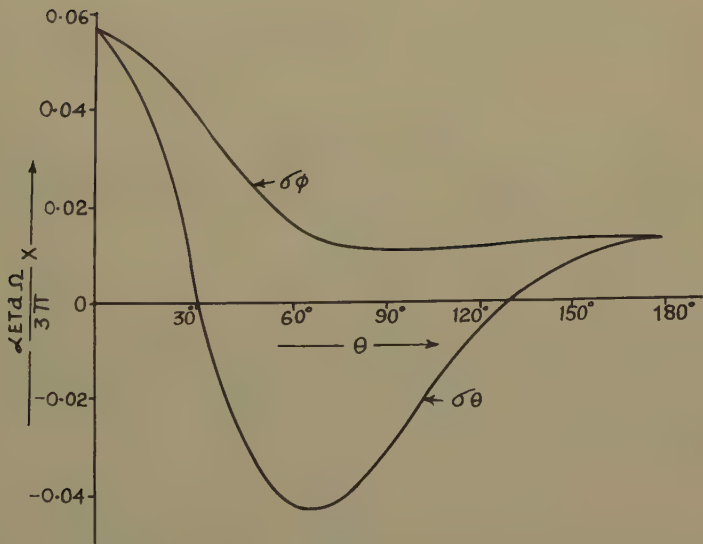


Figure 2  
Stresses on the surface of the spherical cavity.

circular hole in an infinite plate are compared with those in the present three-dimensional problem in Figure 3. As usual, the stress concentration in space problem is found to be of less severe intensity and more localized in character than it is in its two-dimensional counterpart [3].

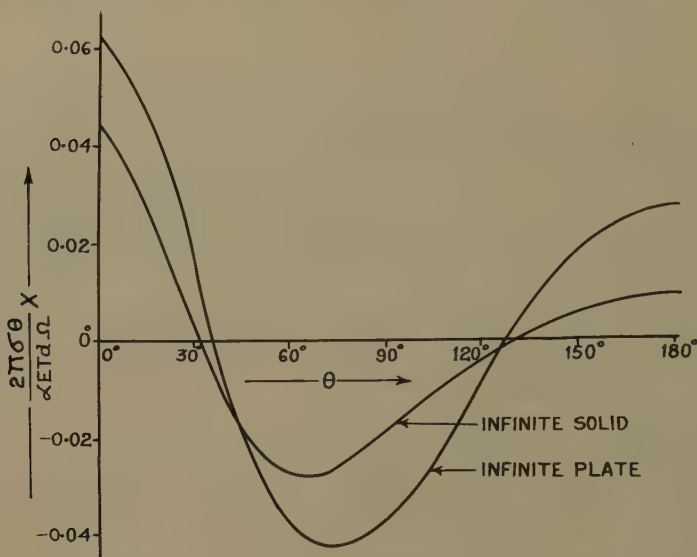


Figure 3

Comparison of the stress on the spherical cavity in an infinite solid with that on the circular hole in an infinite plate.

### *Solid Elastic Sphere*

As in the first problem, we take the centre of the sphere as the origin and the radius to be unity. The heated nucleus is at  $(c, 0, 0)$  such that  $c < 1$ . In order to free the surface of traction, again

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = \tau_{r\varphi} = 0 \quad (r = 1; \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi), \quad (24)$$

Inside and on the surface of the sphere, the stress systems  $[C_n]$  and  $[D_n]$  are regular and we can superpose them on the solution  $[\chi]$  for the infinite solid. We assume solution  $[S']$  to the problem characterized by the boundary conditions (24) in the form

$$[S'] = [\chi] + \sum c_n [C_n] + \sum d_n [D_n]. \quad (25)$$

For the solution  $[\chi]$ ,  $\sigma_r$  and  $\sigma_\theta$  on  $r = 1$  are given by (21). In the present problem  $c < 1$ , and hence the representation of  $f_1(\theta)$  and  $f_2(\theta)$  in Legendre series in this

case will be

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_r]_{r=1} &= f_1(\theta) = A \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c^n P_n(\cos \theta), \\ [\tau_{r\theta}]_{r=1} &= f_2(\theta) = A \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) c^n P'_n(\cos \theta). \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

It can be easily seen that (24) is satisfied if

$$\left. \begin{aligned} c_n &= -\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{2\{n^2+n+1+\nu(2n+1)\}} A c^n, \\ d_n &= \frac{(n+2)(2n+1)}{2\{n^2+n+1+\nu(2n+1)\}} A c^n \\ &\qquad (n=0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \tag{27}$$

With these values of the coefficients  $c_n$  and  $d_n$  equations (25), (2), (3) and (15) to (18) constitute the complete solution of the problem.

Here also the numerical results for  $\nu = 1/4$  and  $c = 1/5$  have been calculated.  $c = 1/5$  is reciprocal point to that in the infinite solid problem with respect to the sphere of unit radius. The displacement and stress components on the surface are represented in Figures 4 and 5 respectively. It is interesting to

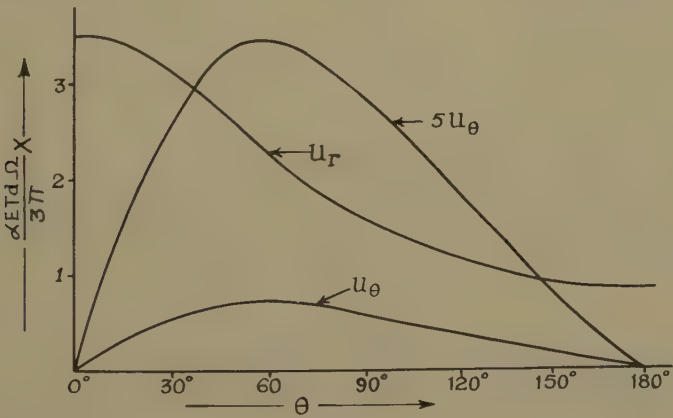


Figure 4  
Deformation of the surface of the solid sphere.

note that in this case  $u_\theta$  is much smaller than  $u_r$  on the surface, but  $c u_\theta$  is of comparable size. The value of  $\sigma_\theta - \sigma_\varphi$  is much smaller in comparison to  $\sigma_\theta$  and  $\sigma_\varphi$ .



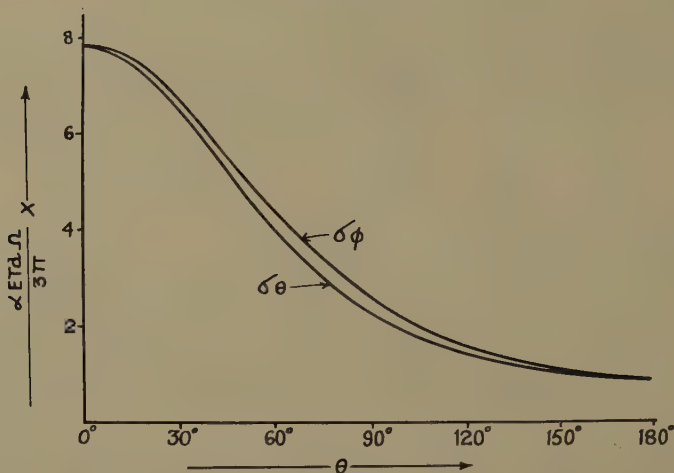


Figure 5  
Stresses in the surface of the solid sphere.

### Acknowledgement

The author offers his grateful thanks to Dr. B. SEN for his kind help in the preparation of this paper.

### REFERENCES

- [1] J. N. GOODIER, *Phil. Mag.* 23, 1017 (1937).
- [2] E. STENBERG, R. A. EUBANKS, and M. A. SADOWASKY, *On Axisymmetric Problem of Elasticity Theory for Region Bounded by Two Concentric Spheres*, *Proc. First nat. Congr. Appl. Mech.*, June 1951 (The American Society of Mechanical Engineers, 1952), p 209-215.
- [3] R. A. EUBANKS, *Stress Concentrations Due to a Hemispherical Pit on a Free Surface*, *J. appl. Mech.* 21, No. 1 (March), 57 (1954).

### Zusammenfassung

Die thermischen Spannungen in einem festen Körper unendlicher Ausdehnung, welcher einen sphärischen Hohlraum enthält, sind bei einer Temperatur von  $0^\circ\text{C}$  in Gegenwart eines erhitzten Elementes, das sich in endlichem Abstand vom Hohlraum befindet, hergeleitet worden, wobei zahlenmässige Angaben für die Spannungen und Verschiebungen an der Oberfläche des Hohlraums gemacht werden können. Die Ergebnisse sind mit den entsprechenden, für den zweidimensionalen Fall gültigen Zahlenwerten verglichen worden. Ferner war es möglich, auch für das Problem einer festen Kugel von der Temperatur  $0^\circ\text{C}$  und einem erhitzten Kern in ihrem Innern eine Lösung zu finden.

(Received: Juni 6, 1956.)

## On a Paper of Gaunt Concerned With the Start of Numerical Solutions of Differential Equations

By RENÉ DEVOGELAERE, Notre Dame, Indiana, USA<sup>1) 2)</sup>

### Introduction

In 1927 GAUNT [3]<sup>3)</sup> published a very important result which seems not to have attracted any attention. He showed that if the difference method

$$\mu \delta \xi_i = h f(t, \xi)_i, \quad \xi_0 = x_0, \quad \xi_1$$

is used to solve the differential equation

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0,$$

the value of  $\xi_1$ , which is necessary to start the method, should be computed in a specific manner not coinciding with the exact value of  $x(h)$ . The error will then behave uniformly in the sense given below and will not have the oscillatory character which is often introduced if  $\xi_1 = x(h)$  is determined by the Taylor expansion of  $x$  at the origin. Moreover, it then becomes possible to use RICHARDSON'S metamethod which permits to obtain a better approximation from two or more computations with different intervals  $h$ .

I would like to state his result in a precise form and give a more elegant proof.

I will also state a similar theorem for second order differential equations. GAUNT'S result can be generalized to many other difference methods to solve differential equations ordinary and partial.

### 1. A Theorem of Gaunt

**Theorem I.** *If  $f(t, x)$  has continuous second partial derivatives, in a domain  $D$ , the solution  $x$  of the differential equation*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.1}$$

*with initial condition  $(t_0, x_0) \in D$  is approximated in the domain  $D$  by the solution of the difference equation*

$$\mu \delta \xi_i = h f(t_i, \xi_i), \quad t_i = t_0 + i h, \quad \xi_0 = x_0, \tag{1.2}$$

$$\xi_1 = x_0 + h \dot{x}_0 + \frac{h^2}{2} \ddot{x}_0 + o(\ddot{x}_0) + h^3 \varepsilon_a, \quad \lim_{h \rightarrow 0} |\varepsilon_a| = 0, \tag{1.3}$$

*in such a way that*

$$\xi(t) = x(t) + h^2 [\eta(t) + \zeta(t, h)] \tag{1.4}$$

*where  $\eta(t)$  is a continuous function and  $\zeta(t_i, h)$  tends to zero with  $h$ .*

<sup>1)</sup> Department of Mathematics, University of Notre Dame.

<sup>2)</sup> Under contract with the Office of Naval Research.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 155.

More specifically  $\eta(t)$  is the solution of the differential equation

$$\dot{\eta} = \eta \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{6} \ddot{x}, \quad \eta(t_0) = 0, \quad (1.5)$$

where  $x$  must be replaced by the above solution of (1.1).

I will give the proof without using the known relation between the operator  $\mu\delta$  and the operator  $D$  of differentiation with respect to  $t$  and will indicate in the next theorem, which asks for stronger conditions, how to use this relation to generalize (1.3) and (1.5).

Under the hypothesis of the theorem, it is clear that  $\ddot{x}$  is continuous, hence that the solution of (1.5) exists, is unique and has a continuous derivative. Hence we have the Taylor expansions

$$\left. \begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + h \dot{x}(t) + \frac{h^2}{2} \ddot{x}(t) + \frac{h^3}{6} [\ddot{x}(t) + \varepsilon], \\ \eta(t+h) &= \eta(t) + h [\dot{\eta}(t) + \varepsilon], \\ f(t, x + \Delta x) &= f(t, x) + \Delta x \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

where  $\varepsilon$  tends to zero with  $h$ .

(1.6), for instance, permits us to write, with  $x_i = x(t_i)$ ,

$$\mu \delta x_i = x_{i+1} - x_{i-1} = h \dot{x}_i + \frac{h^3}{6} (\ddot{x}_i + \varepsilon). \quad (1.7)$$

Hence, if we define  $\zeta(t, h)$  by (1.4), replace in (1.2)  $\xi$  by (1.4) and use (1.7) as well as similar relations, we have

$$\left. \begin{aligned} h \dot{x}_i + \frac{h^3}{6} \ddot{x}_i + \frac{h^3}{6} \varepsilon + h^3 \eta_i + h^3 \varepsilon + h^2 \mu \delta \zeta_i \\ = h f_i + h^3 (\eta_i + \zeta_i) \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \varepsilon \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Because of (1.1) and (1.5),  $\zeta_i$  satisfies the relation

$$\mu \delta \zeta_i = -\frac{h}{6} \varepsilon + h \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i + \varepsilon \right] \zeta_i + h \varepsilon \eta_i, \quad (1.9)$$

with  $\zeta_0 = 0$  and  $|\zeta_1| < h(\varepsilon_a + 2\varepsilon)$ ; indeed, (1.3) and (1.5) at  $t = t_1$  give:

$$\begin{aligned} h^2 \zeta_1 &= x_0 + h \dot{x}_0 + \frac{h^2}{2} \ddot{x}_0 + h^3 \varepsilon_a - \left[ x_0 + h \dot{x}_0 + \frac{h^2}{2} \ddot{x}_0 + \frac{h^3}{6} (\ddot{x}_0 + \varepsilon) \right] \\ &\quad - h^2 [\eta_0 + h (\dot{\eta}_0 + \varepsilon)]. \end{aligned}$$

Therefore, it is possible to prove that  $\zeta_i$  tends to zero with  $h$ , and uniformly so if the solution of (1.1) remains in the domain  $D$ .

## 2. Generalization of Gaunt's Theorem

The theorem given above does not cover exactly the result of GAUNT but is contained in it, the result of GAUNT is closely related with the theorem given below, when  $n = 3$ .

**Theorem II.** *If  $f(t, x)$  has continuous  $n$ -th partial derivatives in a domain  $D$ ,  $n > 2$ , the conclusions of Theorem I hold with (1.3) and (1.4), replaced by*

$$\xi_1 = x_0 + h \dot{x}_0 + \frac{h^2}{2} \ddot{x}_0 + h^4 y_2 + \dots + h^{2p} y_p + h^{n+1} \varepsilon_a, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_a = 0, \quad (2.1)$$

$$y_2 = -\frac{1}{24} \left[ x_0^{\text{IV}} + 2 \ddot{x}_0 \left( \frac{\partial f}{\partial x_0} \right) \right], \dots \quad (2.2)$$

and

$$\xi(t) = x(t) + h^2 \eta_1(t) + h^4 \eta_2(t) + \dots + h^{2p} \eta_p(t) + h^n \zeta(t, h), \quad (2.3)$$

where  $2p$  is the largest even integer smaller or equal to  $n$  and  $\zeta(t_i, h)$  tends to zero with  $h$ .

For the proof of Theorem II, it is easier to use the difference operators to prove that the odd powers of  $h$  disappear in (2.3) and to generalize (1.3) and (1.5). I will do so but will not consider the remainder terms which are to be treated exactly as in Theorem I. I will recall the formula

$$\mu \delta = \sinh h D = h D + \frac{h^3 D^3}{3!} + \dots + \frac{h^{(2n+1)} D^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + \dots \quad (2.4)$$

If we replace in (1.2)  $\xi$  by its value (2.3) and use (2.4) we obtain, after division by  $h$ , ( $\eta_0 = x$ )

$$\sum_{i=0}^i \sum_{j=0}^i \frac{h^{2i} D^{2j+1}}{(2j+1)!} \eta_{i-j} = f + \frac{\partial f}{\partial x} \left( \sum_{i=1} h^{2i} \eta_i \right) + \frac{1}{2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left( \sum_{i=1} h^{2i} \eta_i \right)^2 + \dots \quad (2.51)$$

This gives the equation (1.5) for  $\eta_1$ , and

$$\dot{\eta}_2 = \frac{\partial f}{\partial x} \eta_2 + \frac{1}{2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \eta_1^2 - \frac{x^{(v)}}{5!}, \quad \eta_2(t_0) = 0. \quad (2.52)$$

We then prove by recurrence that (2.3) holds. We only need to remark that (2.3) is correct when  $t = 0$ , which is obvious and when  $t = -h$  which will determine  $\eta_{-1}$ , hence  $\eta_1$ :

$$\xi_1 = \xi_0 + \mu \delta \xi_0 + \frac{\delta^2}{2} \xi_0$$

or

$$\xi_1 = x_0 + h \dot{x}_0 + \sum_{i=1} \sum_{j=0} \frac{h^{2(i+j)} D^{2j}}{(2j)!} \eta_{i0}$$

because (2.3) is satisfied for  $t = 0$  and  $t = h$  and must be satisfied for  $t = -h$  and because of

$$\delta^2 = 2 (\cosh h D - 1) = 2 \sum_{j=1} \frac{h^{2j}}{(2j)!} D^{2j}.$$

This gives (2.1) and (2.2).

### 3. Comments

The importance of the contribution of GAUNT will become clear from the following comments.



(i) The above method is not restricted to that method of difference considered by GAUNT; it shows that contrary to the general belief (and our own belief before we read this paper), one cannot start a difference method by any procedure: an other difference method, Taylor expansion, Runge Kutta method. Indeed, each difference method will ask for the determination of initial values according to well defined formulae which do not necessarily coincide with the exact value of the solution at the corresponding point; we see, for instance that (1.3) differs from the Taylor expansion of  $x(h)$  at the third order, hence the use of Taylor expansion would give, in general, an error of the form  $h^2 \zeta(t, h)$ , where  $\zeta$  is bounded. On the contrary by using the correct procedure the error is made uniform in the sense of formula (1.4) or (2.3). An example is given by GAUNT.

(ii) Theorem II does prove that the difference method described in this theorem is of class  $RC n_e \{2, 4, \dots, 2p\}$  (see [1]), hence that RICHARDSON'S metamethod can be applied [1], [5]. An example is given by GAUNT [3].

(iii) The choice of the difference method made by GAUNT was a lucky one, it was guided by an unconscious realization of the importance of the symmetry of the method. (Central difference methods are most of the time symmetrical by their very nature and it is this symmetry which leads to error formulae like (2.3) where all odd powers of  $h$  are missing.) The advantage of the form of (2.3) is especially great when RICHARDSON'S metamethod is used. This point is discussed in detail in [1].

(iv) The above form of solving differential equations with difference methods plus RICHARDSON'S metamethod constitutes an excellent way of checking computations, especially precious when computations are not part of a large program (see [2]).

(v) GAUNT'S method constitutes an excellent way of studying the errors in the large of a method.

#### 4. Computation of the Starting Value

Clearly the use of formulae (1.3) and (2.1) presents the same computational difficulties than the use of Taylor expansion except perhaps that in this case odd terms have not to be computed. This difficulty can be alleviated, especially when high-speed computers are used, either by programming the differentiation operation, or by using the Runge-Kutta method. Differentiation has already been programmed by KAHRIMANIAN [4], in the form of obtaining the  $n$ -th derivative of a function when the derivative of the elementary functions on which it depends are known.

KAHRIMANIAN makes use of Leibnitz formula of differentiation of a product and of Faadi Bruno formula of differentiation of a function of a function. Although this program is in itself very interesting, it seems to us that it is better to use the straightforward process of determining the successive derivatives one from the other, even if this will necessitate the combination of similar terms at the end of the computations.

The method of RUNGE KUTTA, consists in computing in succession

$$k_1 = h f(t_0, x_0),$$

$$k_2 = h f(t_0 + \alpha h, x_0 + \beta k_1),$$

$$k_3 = h f(t_0 + \alpha_1 h_1 x_0 + \beta_1 k_1 + \beta_2 k_2),$$

and to determine  $\xi_1 - x_0$  as a linear combination of the  $k$ 's. It turns out that four

computations give 11 equations in 13 unknowns which have a double infinity of solutions. In a report [2] we discuss this method to start the computation in detail; we also use the Richardson metamethod to obtain greater precision as well as a check; finally we program the complete method, in such a way that it can be given to a coder with little mathematical experience whatever be the digital computer used.

### 5. On a Second Order Differential Equation

As we have mentioned already in 3 (i), a treatment similar to the above one can be made for many other difference methods. We will, just to provide an exercise, state the following theorem:

**Theorem III.** *If  $f(t, x)$  has continuous  $n$ -th partial derivatives in a domain  $D$ , the solution  $x$  of the differential equation*

$$\ddot{x} = f(t, x) \quad (5.1)$$

*with initial conditions  $(t_0, x_0) \in D$  and  $(t_0, \dot{x}_0)$  is approximated by the solution of the difference equation.*

$$\delta^2 \xi_i = h^2 f(t_i, x_i), \quad t_i = t_0 + i h, \quad \xi_0 = x_0, \quad (5.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 = x_0 + h \dot{x}_0 + \frac{h^2}{2} \ddot{x}_0 + \frac{h^3}{6} \dddot{x}_0 - \frac{h^5}{180} x_0^{(5)} + \dots + h^{2p} y_p + h^{n+1} \varepsilon_a, \\ \left| \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_a = 0, \right. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

*in such a way that*

$$\xi(t) = x(t) + h^2 \eta_1(t) + \dots + h^{2p} \eta_p(t) + h^{n+1} \zeta(t, h), \quad (5.4)$$

where  $\eta_i(t)$  are continuous functions and  $\zeta(t, h)$  tends to zero with  $h$ . In other words the difference method is of class  $RC(n+1)_c$  (see [1]).

More specifically  $\eta_1(t)$  is the solution of

$$\ddot{\eta}_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \eta_1 - \frac{1}{12} x^{iv}, \quad \eta_1(t_0) = \dot{\eta}_1(t_0) = 0, \quad (5.5)$$

$$\ddot{\eta}_2 = \frac{\partial f}{\partial x} \eta_2 + \frac{1}{2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \eta_1^2 - \frac{1}{12} \eta_1^{iv} - \frac{1}{360} x^{vi}, \quad \eta_2(t_0) = \dot{\eta}_2(t_0) = 0. \quad (5.6)$$

JOHN TODD does give [6] an example of the use of (5.2) to solve  $\ddot{x} = -x$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 1$ . His five decimal places computations [Table I, (5)] do start with the exact value of  $x$  at  $t = 0.1$ , instead of the value (5.3) which should be taken. The error is here negligible because  $x^{iv}(0) = 0$  and

$$(0.1)^5 \left( \frac{1}{5!} + \frac{1}{180} \right) x^v(0) = 1.4 \times 10^{-7} !$$

### REFERENCES

- [1] RENÉ DEVOGELAERE, *The Metamethod of Richardson, Influence of Symmetry, Its Interpolatory Character, Applications* (to be published, 1956).
- [2] RENÉ DEVOGELAERE, *A Contribution to Numerical Analysis*, (Center of Numerical Analysis, University of Notre Dame, Report 5).

- [3] J. A. GAUNT, *The Deferred Approach to the Limit, II-Interpenetrating Lattices*, Trans. roy. Soc., Lond. 226, 350–361 (1927).  
 [4] H. KAHRIMANIAN, *Analytic Differentiation by a Digital Computer*, M. A. thesis (Temple University, Philadelphia, Penn., 1953).  
 [5] L. F. RICHARDSON, *The Deferred Approach to the Limit, I-Single Lattice*, Trans. roy. Soc., Lond. 226, 299–349 (1927).  
 [6] JOHN TODD, *Notes on Numerical Analysis, I. Solution of Differential Equations by Recurrence Relations*, MTAC 4, 39–44 (1950).

### Résumé

Dans cet article nous attirons l'attention sur un résultat dû à GAUNT et que voici:

Si pour résoudre l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0$$

on utilise la méthode des différences

$$\mu \delta \xi_i = h f(t, \xi)_i, \quad \xi_0 = x_0, \xi_1$$

la valeur de  $\xi_1$  doit être calculée d'une façon déterminée, distincte de  $x(h)$ . L'erreur varie alors uniformément au sens décrit ci-dessus et on peut appliquer la métaméthode de RICHARDSON.

Nous donnons un énoncé précis et une démonstration élégante que nous étendons ensuite au cas d'une équation différentielle de second ordre. Nous indiquons d'autres généralisations possibles et signalons une méthode pratique de calcul pour  $\xi_1$ .

(Received: August 20, 1956.)

## Jet Issuing in All Directions From a Thin Slit Round a Circular Cylinder of Small Radius Containing Liquid Under Pressure

By LAKSHMI SANYAL, Calcutta<sup>1)</sup>

Two infinite circular cylinders of equal cross-sections are placed very near each other with their axes along the axis of  $z$  and contain liquid under pressure. The liquid issues through the opening in all directions at right angles to the axis, and mixes with the surrounding liquid of the same kind at rest. We take the origin on the axis at the level of the slit, and use cylindrical coordinates  $r, \theta, z$ . The motion in the jet is symmetrical about the  $z$ -axis.

Let  $u, v, w$  be the components of velocity in the directions of  $r, \theta, z$ .  $u$  and  $w$  are independent of  $\theta$ . Assuming the motion to be steady, Stokes-Navier equations in cylindrical coordinates reduce to two, viz.,

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \times \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right), \quad (1)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \times \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (2)$$

<sup>1)</sup> University College of Science.

The equation of continuity is

$$\frac{\partial}{\partial r} (r u) + \frac{\partial}{\partial z} (r w) = 0. \quad (3)$$

Assuming  $u$ ,  $\partial u / \partial r$ ,  $\partial^2 u / \partial r^2$  to be of  $o(1)$  in the jet, we see from the equation of continuity that  $\partial(r w) / \partial z = o(1)$ ; therefore  $w = o(\delta)$ , where  $\delta$  is the thickness of the jet. Since  $u = o(1)$ ,  $\partial u / \partial z = o(1/\delta)$  within the jet. The left-hand side of equation (1) is therefore of  $o(1)$ . On the right-hand side the terms

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad \frac{1}{r} \times \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \frac{u}{r^2}$$

are of  $o(1)$ , while  $\partial^2 u / \partial z^2$  is of  $o(1/\delta^2)$ . Therefore the coefficient of  $v$  on the right-hand side of equation (1) is of  $o(1/\delta^2)$ . If the motion in the jet is to be influenced by viscosity,  $v$  must be of  $o(\delta^2)$ . Hence the first equation of motion reduces to

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \times \frac{\partial p}{\partial r} + v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

If we consider now the second equation of motion, its left-hand side is seen to be of  $o(\delta)$ . On the right-hand side

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \frac{1}{r} \times \frac{\partial w}{\partial r}$$

are of  $o(\delta)$ , while  $\partial^2 w / \partial z^2$  is of  $o(1/\delta)$ , so that

$$v \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

is of  $o(\delta)$ .

Hence we get from the second equation of motion

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = o(\delta).$$

If we neglect terms of  $o(\delta)$ , the pressure in the jet can be considered to be a function of  $r$  alone and for a given value of  $r$ , it is given by the pressure of the liquid outside the jet. Since we consider the liquid outside the jet to be at rest, we have  $\partial p / \partial r = 0$ . Therefore the equation of motion in the jet becomes

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (4)$$

If  $\psi$  be the stream function of the flow in the jet

$$u = \frac{1}{r} \times \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{r} \times \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (5)$$

To obtain a similarity solution of equation (4), we assume

$$\psi = a r^p f(\xi), \quad \xi = \frac{b z}{r^q}, \quad (6)$$

where  $a$ ,  $b$ ,  $p$ ,  $q$  are constants. Then

$$u = a b r^{p-q-1} f', \quad w = -a r^{p-2} (p f - q \xi f').$$

Substituting in equation (4) and simplifying, we get

$$a r^{p+q-2} [(p-q-1) f'^2 - p f f''] = r b f''' \quad (7)$$

In order that this equation may reduce to an ordinary differential equation in  $f$  and  $\xi$  only, we must have

$$p + q = 2. \quad (8)$$

The momentum which crosses a section of the jet perpendicular to  $r = \text{const}$ , between two axial planes inclined at an angle  $d\theta$  is

$$M d\theta = 2 \varrho r d\theta \int_0^\infty u^2 dz = 2 \varrho a^2 b d\theta r^{2p-q-1} \int_0^\infty f'^2 d\xi.$$

Since the motion is steady and the pressure is constant,  $M d\theta$  must be independent of  $r$ . Therefore

$$2p - q - 1 = 0. \quad (9)$$

From (8) and (9), we have

$$p = 1, \quad q = 1. \quad (10)$$

Substituting in (7) and taking  $a = 2 v b$ , we see that  $f$  satisfies the equation

$$2 (f'^2 + f f'') + f''' = 0. \quad (11)$$

From symmetry,  $\psi = \text{constant}$  and  $\partial u / \partial z = 0$  when  $z = 0$ , i. e.,

$$f(0) = 0, \quad f''(0) = 0.$$

Integrating (11) with these conditions, we get

$$f'' + 2 f f' = 0.$$

This equation is identical with the corresponding equation obtained by BICKLEY in his solution of the problem of the two-dimensional jet. Integrating again, we get

$$f' + f^2 = \text{const} = c^2,$$

which gives

$$f = c \tanh (c \xi + \beta).$$

Since  $f(0) = 0$  we have  $\beta = 0$ . The condition  $u \rightarrow 0$  when  $z \rightarrow \infty$ , i. e.,  $f'(\xi) \rightarrow 0$  when  $\xi \rightarrow \infty$ , is satisfied. We have therefore

$$\psi = a c r \tanh \left( \frac{b c z}{r} \right).$$

Replacing  $a c$ ,  $b c$  by  $a$ ,  $b$  respectively we do not alter the value of the ratio  $b/a = 1/2 v$ . This means that we can take  $c = 1$ . We then have

$$f(\xi) = \tanh \xi, \quad \psi = a r \tanh \xi, \quad \xi = \frac{b z}{r},$$

$$M = 2 \varrho a^2 b \int_0^\infty \text{sech}^4 \xi d\xi = \frac{16}{3} \varrho v^2 b^3.$$

Therefore if  $M$  is prescribed

$$b = \left( \frac{3 M}{16 \varrho v^2} \right)^{1/3}, \quad a = \left( \frac{3 v M}{2 \varrho} \right)^{1/3}.$$



Hence

$$\psi = \left( \frac{3 \nu M}{2 \varrho} \right)^{1/3} r \tanh \zeta, \quad \zeta = \left( \frac{3 M}{16 \varrho \nu^2} \right)^{1/3} \frac{z}{r},$$

$$u = \left( \frac{9 M^2}{32 \varrho^2 \nu} \right)^{1/3} \frac{1}{r} \operatorname{sech}^2 \zeta, \quad w = \left( \frac{3 \nu M}{2 \varrho} \right)^{1/3} \frac{1}{r} (\zeta \operatorname{sech}^2 \zeta - \tanh \zeta).$$

The total flux of mass across the surface of the cylinder  $r = \text{const.}$  is

$$Q = 4 \pi \varrho r \int_0^\infty u \, dz = 2 \pi (12 \varrho^2 \nu M)^{1/3} r.$$

In conclusion, I wish to express my thanks to Dr. S. GHOSH for helpful suggestions.

### *Zusammenfassung*

Das Problem eines zweidimensionalen Strahles, der aus einem dünnen Schlitz herausströmt, ist gelöst worden durch SCHLICHTING<sup>2)</sup> in Form von unendlichen Reihen, und durch BICKLEY<sup>3)</sup> in geschlossener Form. Das Problem eines dreidimensionalen, achsensymmetrischen Strahles ist gelöst worden durch SCHLICHTING<sup>2)</sup>. In vorliegender Publikation wird das Problem eines dreidimensionalen Strahles aus einem kreisrunden Schlitz in der Wand eines Kreisrohres behandelt. Zu diesem Zweck wurde die Annahme getroffen, dass die Grenzschichtapproximationen im Strahl gültig sind. Bei Einführung der Stokesschen Stromfunktion  $\psi$  ist eine Ähnlichkeitslösung der Differentialgleichung für  $\psi$  gefunden und das Problem in geschlossener Form gelöst worden. Der totale Mengenfluss durch einen zylindrischen Schnitt des Strahles wurde berechnet.

(Received: August 15, 1956.)

## Statistische Erwägungen bei Versuchen zur Beeinflussung der Niederschläge

Von PAUL SCHMID, Zürich<sup>1)</sup>

Seit einigen Jahren wird besonders in den niederschlagsarmen Gegenden der Vereinigten Staaten versucht, durch Impfung der Atmosphäre mit geeigneten Stoffen die Wolken zum Ausregnen zu bringen. An einzelnen Haufenwolken, die vom Flugzeug aus geimpft wurden, konnte gezeigt werden, dass unter günstigen Bedingungen eine Wirkung erzielt werden kann. Man weiss aber nicht, ob die grossangelegten Impfaktionen, bei denen durch am Boden aufgestellte Generatoren verhältnismässig grosse Mengen von Silberjodid zerstäubt werden, eine ins Gewicht fallende Wirkung haben. Die einzige Möglichkeit zur Beantwortung dieser Frage besteht in der statistischen Auswertung der Resultate von solchen Impfaktionen. Zu diesem Zweck sind verschiedene Auswertemethoden angewandt worden.

<sup>2)</sup> H. SCHLICHTING, Z. angew. Math. Mech. 13, 260 (1933).

<sup>3)</sup> W. G. BICKLEY, Phil. Mag. 23, 727 (1937).

<sup>1)</sup> Eidgenössische Anstalt für das forstliche Versuchswesen an der ETH.

Die einfachste Möglichkeit besteht wohl darin, dass man die Niederschlagsmenge der Jahre, in denen ein Teil der Frontdurchgänge geimpft wurde, mit der mittleren Niederschlagsmenge früherer Jahre vergleicht. Da die natürlichen Niederschlagsmengen von Jahr zu Jahr ziemlich stark schwanken, wird man mit diesem einfachen Verfahren aber nie zu einem Entscheid gelangen können.

Die Impfunternehmer verwenden vor allem eine sehr anschauliche Auswertemethode. Über das Testgebiet, in welchem der Niederschlag vermehrt werden sollte, und über seine weitere Umgebung sind Regenmeßstationen verteilt, an denen während vieler Jahre periodisch die Niederschlagsmenge gemessen wird. Der Niederschlag eines geimpften Frontdurchganges wird ebenfalls an allen Stationen gemessen und daraus für jeden Ort der Quotient

$$R = \frac{\text{Niederschlag des geimpften Frontdurchganges}}{\text{Mittlere Niederschlagsmenge ohne Impfung}}$$

berechnet. Man nimmt an, dass die Verteilung der Niederschläge über das Gebiet ohne Impfung bei allen Frontdurchgängen ungefähr dieselbe sei.  $R$  sollte daher, wenn die Impfung nicht gewirkt hat, überall etwa gleich gross sein. Wenn die Impfung gewirkt hat, wird  $R$  im Testgebiet grösser sein als in einer weiteren Umgebung, die nicht mehr von der Impfung beeinflusst ist; man wird dort also ein Maximum erhalten. Beobachtet man anderseits bei einer Impfung ein ausgeprägtes Maximum im Testgebiet, so wird man vermuten, dass die Impfung gewirkt hat.

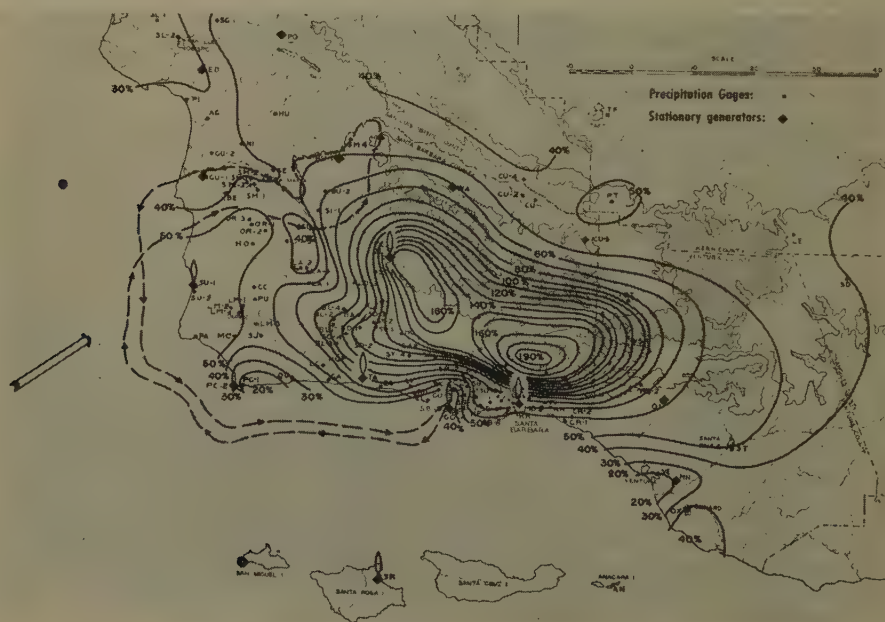


Abbildung 1

Santa Barbara County, Impfergebnis für einen Einzelfrontdurchgang vom 10. bis 13. Januar 1952.



Abbildung 2

Santa Barbara County, Impfergebnis für die Periode vom Dezember 1952 bis April 1953.

Die Annahme, dass die Niederschlagsverteilung ohne Impfung bei jedem Frontdurchgang etwa die gleiche wäre, ist nicht begründet. Daher gibt eine solche Auswertung niemals ein eindeutiges Resultat. Auch ein sehr ausgeprägtes Maximum, wie es im Beispiel der Abbildung 1<sup>2)</sup> auftritt, könnte ohne Impfung auftreten.

Oft wird die Niederschlagsmenge einer ganzen Periode, während der geimpft wurde, als Zähler von  $R$  benützt (Abbildung 2). Wenn die Impfung nicht wirkt, kann jetzt mit etwas grösserem Recht erwartet werden, dass  $R$  überall etwa gleich gross sein werde, da sich verschiedene Frontdurchgänge überlagern. Grundsätzlich kann man aber auch so nicht zu einem Entscheid gelangen.

Bedeutend mehr dürfen wir von einer Auswertemethode erwarten, bei der die Regenmenge im Testgebiet mit derjenigen in einem Kontrollgebiet verglichen wird. Das Kontrollgebiet muss so gewählt werden, dass es von der Impfung vollkommen unbeeinflusst bleibt. Die Werte des Niederschlags im Testgebiet und im Kontrollgebiet werden, für viele impffreie Perioden, in einem Diagramm eingetragen. Wenn die beiden Gebiete nahe beieinander und topographisch ähnlich gelegen sind, werden die Niederschlagsmengen gut korreliert sein, die Punkte des Diagramms werden sich durch eine Gerade ausgleichen lassen. Die beste Gerade wird nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Aus der Streuung der

<sup>2)</sup> Die Abbildungen 1–3 sind Berichten der North American Weather Consultants entnommen; siehe auch Bull. S.E.V. 44, 189 (1953).

Punkte um diese Gerade lässt sich die Wahrscheinlichkeit

$$W(y < y_0 | x),$$

berechnen, dass bei gegebenem  $x$  die Grösse  $y$  grösser als ein bestimmter Wert  $y_0$  ist. Wenn man anderseits die Grösse dieser Wahrscheinlichkeit vorgibt, zum Beispiel

$$W(y < y_0 | x) = 1\%,$$

so wird durch diese Gleichung eine Funktion  $y_0(x)$  bestimmt. Es wird im Durchschnitt vieler Perioden nur etwa 1% aller Punkte oberhalb dieser Linie zu liegen kommen.

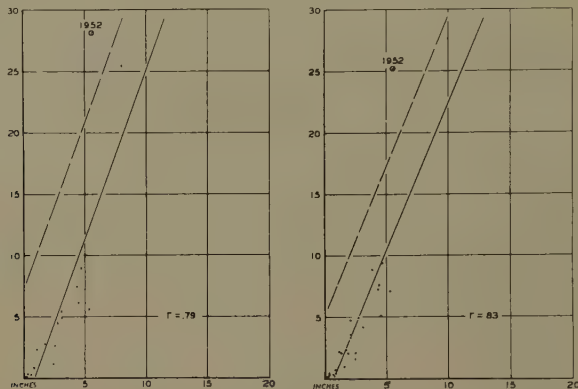


Abbildung 3

Impfgebiet Santa Barbara County. Regressionsberechnung mit zwei Vergleichsgebieten, Ergebnis für den Winter 1951/52.

Die gestrichelten Linien sollten die Entscheidungsfunktionen ( $W = 1\%$ ) darstellen. In Wirklichkeit müssen diese Geraden aber durch nach oben geöffnete Parabelbögen ersetzt werden.

Wenn jetzt während einer oder mehrerer Perioden geimpft wird und die Impfung eine ansehnliche Wirkung hat, wird der dieser Periode entsprechende Punkt voraussichtlich oberhalb dieser Linie zu liegen kommen. Wenn die Impfung nicht wirkt, bleibt die Wahrscheinlichkeit dafür klein. Man hat daher grundsätzlich eine Möglichkeit, objektiv zu entscheiden, ob die Impfung gewirkt habe oder nicht.

Diese Auswertemethode ist sehr häufig und ziemlich unkritisch angewandt worden. Die wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden, auf Grund derer die Entscheidungsfunktion  $y_0(x)$  bestimmt wird, beruhen auf einigen Voraussetzungen:

1. Der Zusammenhang zwischen  $x$  und  $y$  soll linear sein;
2. die Verteilung von  $y$  bei festem  $x$  soll normal sein;
3. die Streuung von  $y$  soll für alle  $x$  gleich gross sein.

In vielen Fällen sind diese Voraussetzungen annähernd erfüllt.  $y$  wird um so besser normal verteilt sein, je grösser die Anzahl der Regenmesser ist und je länger die Perioden sind. Wenn die Streuung von  $y$  proportional zu  $x$  anwächst, werden die transformierten Variablen  $x^* = \sqrt{x}$ ,  $y^* = \sqrt{y}$  die dritte Bedingung erfüllen.



Weit mehr als diese formellen Einwände fällt ein prinzipieller Einwand gegen diese Auswertemethode ins Gewicht. Das Verhältnis der Regenmengen in Test- und Kontrollgebiet wird bei jedem Frontdurchgang ein etwas anderes sein. Es gibt Typen von Gewittern, die dem Testgebiet verhältnismässig mehr Niederschlag bringen als dem Kontrollgebiet, auch wenn nicht geimpft wird, und solche, bei denen es umgekehrt ist. Wir können prinzipiell drei Typen von Frontgewittern unterscheiden:

Typ A: Die Regenmenge ist im Testgebiet verhältnismässig höher als im Kontrollgebiet;

Typ B: Die Regenmengen verhalten sich etwa so wie die Gesamtregenmengen.

Typ C: Die Regenmenge ist im Kontrollgebiet verhältnismässig höher als im Testgebiet.

Da das Wetter von Jahr zu Jahr und von Jahrzehnt zu Jahrzehnt seine Struktur etwas ändert, kann es sein, dass in der Impfperiode mehr Gewitter vom Typ A vorkommen als in den früheren Perioden, wodurch eine Impfwirkung vorgetäuscht wird; es kann aber auch das Gegenteil eintreten.

Noch schwerwiegender wird dieser Einwand, wenn nur ein Teil der Frontdurchgänge geimpft wird und nur bei diesen Gewittern die Regenmenge in den beiden Gebieten gemessen wird. Die Gewitter, die für die Impfung günstig sind, können ja bevorzugt einem der drei Gewittertypen angehören. Der Impfunternehmer kann zudem, bewusst oder unbewusst, verhältnismässig mehr Gewitter vom Typ A impfen, wodurch natürlich das Versuchsergebnis sehr stark verfälscht werden kann.

Man könnte versuchen, nach meteorologischen Gesichtspunkten jeden Sturm in eine der drei Kategorien einzureihen und für jede Kategorie eine besondere Regressionsgerade aufzustellen. Das Resultat kann so etwas verbessert werden, die Zuordnung ist jedoch höchst unsicher und kann ebenfalls subjektiv beeinflusst sein.

Wir können einzig und allein dadurch zu einer objektiven Beantwortung unserer Versuchsfrage kommen, indem der Entscheid, ob ein Frontdurchgang geimpft werden soll oder nicht, dem Zufall überlassen wird.

Nach meteorologischen Gesichtspunkten wird vorerst wie bisher entschieden, ob man das kommende Gewitter impfen sollte oder nicht. Dann entscheidet ein Zufallsexperiment, zum Beispiel ein Würfel, ob das Gewitter geimpft wird oder ob es als Vergleichsgewitter dient. Es werden also nur etwa halb so viele Frontdurchgänge geimpft wie bisher. Für jedes Gewitter werden die Regenmengen in den beiden Gebieten gemessen, wodurch wir zwei vollkommen gleichberechtigte Serien von Wertepaaren  $(x, y)$  und zwei Regressionsgeraden erhalten, von den geimpften und von den ungeimpften Gewittern.

Man kann jetzt angeben, wie gross die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass zwischen den beiden Regressionsgeraden ein bestimmter Unterschied besteht, unter der Hypothese, dass die Impfung keine Wirkung habe. Wenn diese Wahrscheinlichkeit für den wirklich eingetretenen Unterschied zwischen den beiden Geraden genügend klein ist, zum Beispiel kleiner als 1%, wird man daraus schliessen, dass die Hypothese falsch ist, dass die Impfung also gewirkt hat. Die Grösse der Wirkung kann einigermaßen abgeschätzt werden.

Durch diese Versuchsanlage erreichen wir, dass Daten aus früheren Perioden, in denen das Wetter ja eine etwas andere Struktur haben konnte, nicht benötigt werden; der Versuch ist in sich abgeschlossen. Zudem sind jetzt subjektive Ein-



flüsse auf das Versuchsergebnis sozusagen ausgeschlossen. Bei genügend langer Versuchsdauer wird daher eine äusserst zuverlässige Aussage möglich sein.

Wenn kein passendes Vergleichsgebiet zur Verfügung steht, kann der Versuch trotzdem auf diese Art durchgeführt werden. In diesem Fall müssen die Mittelwerte der beiden Vergleichsserien miteinander verglichen werden, statt der Regressionsgeraden. Der Versuch wird allerdings etwas länger dauern.

Bis heute ist einzig durch die Universität New York ein kleiner Versuch auf ähnlicher Basis durchgeführt und abgeschlossen worden. Die Wirkung der Impfung wurde dabei aber nicht gesichert. In Israel läuft seit einigen Jahren ein Versuch, bei dem durch ein Zufallsexperiment bestimmt wird, welche Gewitter geimpft werden und welche als Vergleichsgewitter dienen sollen. Das Zufallsexperiment wird aber zum Voraus durchgeführt, also vor dem Entscheid des Meteorologen. Da der Meteorologe weiss, ob das nächste von ihm bestimmte Gewitter geimpft wird oder nicht, kann er das Versuchsergebnis subjektiv beeinflussen, indem er zum Beispiel wartet, bis ein Gewitter vom Typ A eintritt.

Wir haben daher bis heute noch keine Gewissheit darüber, ob die getätigten Impfkationen eine messbare Wirkung haben. Auf Grund der bisher durchgeführten Auswertungen werden mittlere Wirkungen von 6–15% der mittleren Regenmenge vermutet. Diese Differenz kann aber sehr wohl durch subjektive Einflüsse vorgetäuscht werden.

Die gleichen Impfmethoden werden angewendet zur Bekämpfung des Hagels. Grundsätzlich können in diesem Fall genau die gleichen Überlegungen gemacht werden. Auch hier wird man nur zu einem eindeutigen Entscheid gelangen können, wenn ein Zufallsexperiment bestimmt, ob ein Gewitter geimpft werden soll oder nicht. Ein Kontrollgebiet, das unbeeinflusst von der Impfung ist, dessen Hagelfälle aber gut korreliert sind mit denjenigen im Testgebiet, ist meist nicht vorhanden, so dass man sich darauf beschränken muss, die totale Hagelhäufigkeit in den beiden Gewitterserien zu vergleichen. Eine weitere Erschwerung entsteht dadurch, dass die Hagelhäufigkeit oft sehr klein ist. Immerhin darf dafür vielleicht eine etwas höhere prozentuale Wirkung der Impfung erwartet werden, was die Versuchsdauer beträchtlich verkürzen könnte. Zuverlässige Resultate liegen bis heute aber auch über diese Impfwirkung noch nicht vor.

*Zusatz bei der Drucklegung:* Soeben wird bekannt, dass im Santa Barbara County, auf das sich auch die obigen Figuren beziehen, seit 1. Januar 1957 ein Regenvermehrungsversuch mit Zufallszuordnung im Sinne dieser Ausführungen läuft. Die Impfung wird wie bis anhin durch die North American Weather Consultants besorgt, und die Niederschlagsmessung untersteht dem Amt der California State Water Resources. Die Versuchsplanung, die statistische Auswertung sowie das Zufallsexperiment ist vom Statistical Laboratory der University of California, Berkeley, unter Leitung von J. NEYMAN, übernommen worden. Auch in dem von der Eidgenössischen Kommission zum Studium der Hagelbildung und Hagelabwehr im Südtessin durchgeführten Impfversuch zur Behinderung der Hagelbildung wird diesen Sommer das gleiche statistische Verfahren angewandt werden.

#### Literaturverzeichnis

Proceedings of the Conference on the Scientific Basis of Weather Modification Studies (Tucson 1956).

Weather Modification Operations in California (State of California, 1955).

*Summary*

This report deals with the experiments to increase precipitation and to prevent hail by way of seeding the atmosphere with chemicals suited to the purpose. The statistical evaluation methods hitherto adopted are discussed, and it is shown why it is impossible to give a reliable answer to the question of the seeding results unless randomization is introduced into the scheme of the experiments.

(Eingegangen: 12. Januar 1957.)

## The Transfer of Momentum Across Surfaces Drawn Perpendicular to the Direction of Flow in Gases Under Laminar Conditions

By IBRAHIM IBRAHIM SHERIF, Alexandria, Egypt<sup>1)</sup>

It is not generally remarked in treatises on kinetic theory of gases that tangential stress forces act across surfaces that are drawn perpendicular to the direction of flow in gases under laminar conditions. The purpose of the present work is to calculate these forces and to prove that they must be equal to the stress forces that act across surfaces parallel to the direction of flow; otherwise a cube of fluid with faces perpendicular to the two directions would obviously be set into rotation.

The transverse momentum across surfaces perpendicular to the direction of flow arises in the following way:

Suppose the flow is horizontal and increases in the upward direction. Consider a face of an elementary cube across which the mass flow is perpendicularly outward from the element. The number of molecules entering the element per second across this face due to thermal agitation is slightly decreased by the mass velocity. This decrease in the number is greater in the case of molecules that enter with a downward component of velocity than in the case of molecules that enter with an upward component, because the former molecules come from a region of the gas in which the mass velocity is greater. Thus molecules entering with an upward component are slightly more numerous, and the result is a net inflow of upward momentum into the element. This effect is easily calculated as follows:

Let us first calculate the shearing stress across surfaces parallel to the direction of flow:

Let  $N$  be the number of molecules per cubic centimeter, therefore number of molecules per unit volume with thermal velocity  $C$  in the direction  $d\theta \, d\varphi$  is

$$N \frac{\sin \theta}{4\pi} \, d\theta \, d\varphi;$$

component of  $C$  for these molecules in  $y$ -direction is

$$C \sin \theta \cos \varphi;$$

the stream velocity contributes nothing in the  $y$ -direction, hence number of

<sup>1)</sup> Faculty of Engineering, University of Alexandria.

molecules crossing unit area per second in the  $y$ -direction is

$$N \frac{\sin \theta}{4 \pi} d\theta d\varphi C \sin \theta \cos \varphi;$$

momentum in  $x$ -direction for one molecule is

$$m \left\{ C \cos \theta + \left( u - L \frac{du}{dy} \sin \theta \cos \varphi \right) \right\},$$

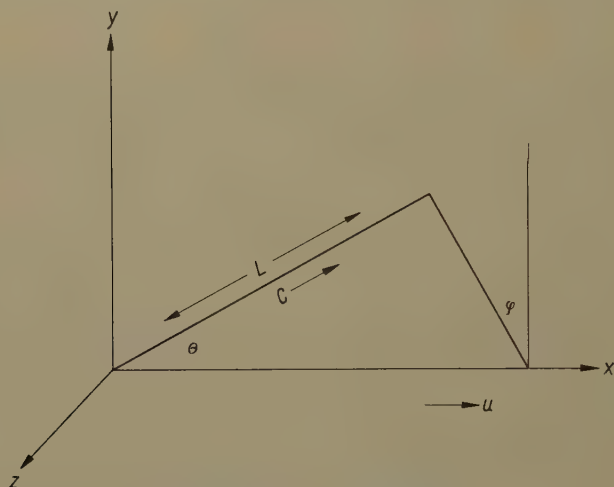


Figure illustrating momentum.

where  $u$  is the stream velocity and  $L$  is the mean free path. Hence total momentum transfer is:

$$\left. \begin{aligned} & N m \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} C \sin \theta \cos \varphi \left( C \cos \theta + u - L \frac{du}{dy} \sin \theta \cos \varphi \right) \frac{\sin \theta}{4 \pi} d\theta d\varphi \\ &= -N m C \frac{1}{4} L \frac{du}{dy} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = -\frac{1}{3} \rho C L \frac{du}{dy}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Second, the shearing stress across surfaces perpendicular to the direction of flow can be calculated in a similar manner as follows:

Component of  $C$  for the molecules in the  $x$ -direction is:

$$C \cos \theta,$$

these molecules near the element have also a velocity in the  $x$ -direction of average value

$$u - L \frac{du}{dy} \sin \theta \cos \varphi,$$

hence momentum crossing unit area per second in the  $x$ -direction is

$$\left( C \cos \theta + u - L \frac{du}{dy} \sin \theta \cos \varphi \right) N \frac{\sin \theta}{4\pi} d\theta d\varphi,$$

momentum in  $y$ -direction is:

$$m c \sin \theta \cos \varphi,$$

the stream component contributing nothing, hence momentum transfer is

$$\left. \begin{aligned} N m \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} C \sin \theta \cos \varphi \left( C \cos \theta + u - L \frac{du}{dy} \sin \theta \cos \varphi \right) \frac{\sin \theta}{4\pi} d\theta d\varphi \\ = - \frac{1}{3} \varrho C L \frac{du}{dy}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

This means that the momentum across surfaces parallel to the direction of flow is equal to the momentum across surfaces in the perpendicular direction. In other words the principle of conjugate shears which is generally supposed to apply to elastic solids must as well hold in gases.

### Zusammenfassung

Bei laminarer Strömung eines Gases ist die Übertragung der Bewegungsgrösse quer zu Flächen senkrecht zur Strömungsrichtung berechnet und gleich der transversalen Bewegungsgrösse quer zu Flächen, die parallel zur Strömungsrichtung laufen, gefunden worden. Daraus kann der Schluss gezogen werden, dass ein Flüssigkeitswürfel mit Seiten, die parallel zu den angegebenen Richtungen sind, statisch im Dreh-Gleichgewicht ist.

(Received: September 5, 1956.)

### Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

**Properties of Metallic Surfaces.** *A Symposium Organized by the Institute of Metals and Held at the Royal Institution, London, on 19 November 1952* ([Institute of Metals Monograph and Report Series No 13] The Institute of Metals, London 1953). 368 S., 150 Abb.; 35 s.

In diesem Symposium wurden von hervorragenden englischen Wissenschaftlern (BOWDEN, TOLANSKY, TABOR, EVANS und anderen) neue Ergebnisse von Grundlagenforschungen im Gebiet der Oberflächentextur und -struktur von Metallen bekanntgegeben, die vielfach einen wertvollen Beitrag zur Klärung physikalischer, chemischer und technologischer Eigenschaften von Metallen bilden. Diese Grundlagenforschung ist nicht nur für Physiker und Chemiker von höchstem Reiz, sondern erweckt auch das lebhafteste Interesse des Technikers, der sich bewusst ist, wie ausserordentlich problematisch solche Rechnungsbeurteilungen sind, wie Reibungskoeffizienten und andere mehr.

Die Veröffentlichung der Vorträge und Diskussionsbeiträge von gut zwei Dutzend englischen Forschern verdient deshalb höchste Beachtung aller, die



aus physikalisch-theoretischem oder technisch-praktischem Interesse sich mit den Vorgängen befassen, die von den äussersten Grenzschichten ausgehen oder durch sie stark beeinflusst werden, seien es Probleme der Reibung, der Korrosion, der Wechselfestigkeit, der Diffusion, des Skineffektes, der Beilby-Schicht oder andere mehr.

Die Hunderte von Literaturangaben geben ein eindruckliches Bild von dem Umfang, den diese «Wissenschaft der Grenzschichten fester Körper» heute angenommen hat, deren Auswirkung im Gebiet der praktischen Technik nur noch eine Frage der Zeit ist.

*E. Bickel*

**Mass und Integral und ihre Algebraisierung.** Von C. CARATHÉODORY (Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1956). 337 S., 12 Fig.; Fr. 38.50.

Die den modernen Integraltheorien zugrunde gelegten Punktmengen haben als wesentliche Eigenschaft, dass sie als Operationen die Bildung von Vereinigung, Durchschnitt und Differenz zulassen. Dieselben Eigenschaften weisen nun aber auch die Elemente (Somen) einer Booleschen Algebra auf. Geht man daher von einer solchen Algebra aus, dann erhält man eine die bisherigen Integraltheorien umfassende Theorie von grosser Allgemeinheit und Natürlichkeit, und man gelangt zu einer Algebraisierung des Integralbegriffs. Diese Zusammenhänge wurden von C. CARATHÉODORY vor ungefähr zwanzig Jahren bemerkt. – Das Manuskript zum vorliegenden Buch, das diese Ideen übersichtlich entwickelt, konnte CARATHÉODORY noch vor seinem Tode fertigstellen. Die Bereinigung für den Druck lag in den bewährten Händen von P. FINSLER, A. ROSENTHAL und R. STEUERWALD, denen es zu verdanken ist, dass das Buch überhaupt erscheinen konnte.

Am Anfang wird eine Boolesche Algebra eingeführt, unter Zugrundelegung des Axiomensystems von M. H. STONE, und dann werden die Begriffe Ortsfunktion, Massfunktion und Integral definiert und ihre Eigenschaften entwickelt. Schliesslich folgen Anwendungen der Integraltheorie insbesondere auf Grenzprozesse, Mass- und Inhaltsfunktionen. – Die Darstellung ist ausgezeichnet und übersichtlich, und das Buch gibt die erste treffliche lehrbuchmässige Einführung in das Gebiet. Ebenso sind auch Druck und Ausstattung des Buches in gewohnter Weise vorzüglich.

*E. Roth-Desmeules*

**Vorlesungen über Himmelsmechanik.** Von C. L. SIEGEL ([Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 85] Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1956). 212 S.; DM 29.80/DM 33.–.

Das vorliegende Werk von C. L. SIEGEL behandelt einige Ideen und Resultate der klassischen Himmelsmechanik, die aber im Grunde nicht nur dort ihre Bedeutung haben, sondern sich auch auf andere Fälle übertragen lassen und vielfach zu wenig bekannt sind. Zunächst geht es um das Verhalten der Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen im Grossen; hier haben H. POINCARÉ und K. F. SUNDMAN sowie G. D. BIRKHOFF wesentliche Beiträge geleistet. Ein Kapitel befasst sich mit der Bestimmung von geschlossenen (periodischen) Lösungen, ein anderes mit dem Stabilitätsproblem (Satz von LJAPUNOV) und der damit zusammenhängenden, so schwierigen und weitgehend noch ungelösten Frage der Konvergenz der auftretenden Entwicklungen.

Die Darstellung des Verfassers ist sehr klar und übersichtlich, und das aus Vorlesungen hervorgegangene ausgezeichnete Buch vermag jedenfalls auch manche Anregung zu analogen Untersuchungen auf andern Gebieten als der Himmelsmechanik zu geben.

*E. Roth-Desmeules*



ELEKTRONENMIKROSKOPE  
ELEKTRONENDIFFRAKTOGRAPHEN  
HOCHSPANNUNGSOSZILLOGRAPHEN



TRÜB, TÄUBER · ZÜRICH

*Neuerscheinung*

RUTISHAUSER

## **Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus**

Von Prof. Dr. H. Rutishauser, ETH, Zürich. 74 Seiten. Broschiert Fr. 8.50 (DM 8.50).

Mitteilungen a. d. Institut für angew. Math. ETH. – Nr. 7.

Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus ist eine neu entwickelte Methode zur Lösung verschiedenartiger Aufgaben der angewandten Mathematik, von denen nur die folgenden genannt seien: Summation schlecht konvergenter Reihen, Lösung algebraischer Gleichungen, Bestimmung von Eigenwerten vielreihiger Matrizen, insbesondere mit Rechenautomaten. Er hat sich für die Bestimmung kritischer Frequenzen und Drehzahlen bewährt. Der Verfasser gibt eine zusammenfassende Darstellung.

*Voranzeige*

WITTENBERG

## **Vom Denken in Begriffen**

Mathematik als Experiment des reinen Denkens. Von Alexander Israel Wittenberg, Professor an der Laval-Universität in Quebec. Etwa 370 Seiten. Preis gebunden ca. Fr. 25.– (ca. DM 25.–). Sammlung «Wissenschaft und Kultur» – Band 12.

Nirgends wird die Macht und die innere Kohärenz begrifflichen Denkens so schonungslos auf die Probe gestellt wie in der Mathematik. Im mathematischen Grundlagenproblem wird, wie dieses Werk in eingehender Diskussion zeigt, eine echte Problematik menschlichen Denkens offenbar. Die Untersuchung derselben führt zu wesentlichen Einsichten in die Natur und die Grenzen menschlicher Erkenntnis, und damit über den Menschen schlechthin.

Das Buch will neues Licht auf die mathematische Grundlagenforschung werfen. Zugleich wendet es sich an alle, insbesondere Wissenschaftler, Philosophen und Theologen, die sich über die erkenntnismässigen Gegebenheiten des menschlichen Daseins Rechenschaft ablegen wollen.

Bestellungen an Ihren Buchhändler – Orders through your bookseller  
Commandes à votre librairie

---

BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL UND STUTTGART

V. MANGOLDT-KNOPP

# **Einführung in die höhere Mathematik**

*10. vollständig neubearbeitete Auflage*

BAND I: Zahlen, Funktionen, Grenzwerte, Analytische Geometrie, Algebra, Mengenlehre. XVI + 564 Seiten mit 116 Figuren. Gr. 8°. Ganzleinen DM 23.-. 1956.

BAND II: Differentialrechnung, Unendliche Reihen, Elemente der Differentialgeometrie und der Funktionstheorie. XVI + 630 Seiten mit 108 Figuren. Ganzleinen DM 23.-. Februar 1957.

BAND III: Integralrechnung und ihre Anwendungen, Funktionentheorie, Differentialgleichungen. XVI + 618 Seiten mit 103 Figuren. Gr. 8°. Ganzleinen DM 23.-. Juli 1957.

---

## **Niederfrequenz- und Mittelfrequenz-Messtechnik**

Von Dr.-Ing. A. WIRK und Dipl.-Ing. H. G. THILO.  
VIII + 234 Seiten mit 223 Abbildungen. Gr. 8°.  
Ganzleinen DM 28.-. 1956.

Das Buch gibt ein vollständiges Bild der Physik und Technik dieser Messverfahren und behandelt auch Entwicklung, Bau, Prüfung, Montage und Wartung solcher Anlagen und Messgeräte.

---

**S. HIRZEL VERLAG STUTTGART**